

Segnatura di forme quadratiche

Data $q(x)$ forma quadr. in n variabili, definiamo

- $m_+ = \max\{\dim V\}$ dove V è un sottospazio su cui $q(x)$ è def. pos., cioè $q(v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$.
- $m_- = \max\{\dim V\}$ dove V ... definita negativa

Caratterizzazione Detta A la matrice che rappresenta q , cioè

$$q(x) = x^t A x = \langle Ax, x \rangle$$

allora $m_+ = \#$ autovalori positivi

$m_- = \#$ autovalori negativi

$\leadsto m_0 = \#$ autovalori nulli

Dim. Giudichiamo con k il numero di autovalori positivi.

Devo dimostrare due cose

→ esiste un s.sp. V di dim k su cui $q(x)$ è def. pos. ($m_+ \geq k$)

→ NON esiste un s.sp. V di dim $k+1$ su cui $q(x)$ è def. pos.

Step 1 A è simmetrica. Teo. spettrale $\Rightarrow$ esiste una base ortonormale costituita da autovettori di A . Siano $u_1, \dots, u_k$ gli el. corrispondenti agli autov. positivi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Dico che $q(x)$ è def. positiva in $V = \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$.

Sia $v \in V$. Allora

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$$

$$Av = c_1 A u_1 + \dots + c_k A u_k = c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_k \lambda_k u_k$$

Ma allora

$$q(u) = \langle Au, u \rangle$$

$$= \langle c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_k \lambda_k u_k, c_1 u_1 + \dots + c_k u_k \rangle$$

$$= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_k c_k^2$$

(tutti i termini misti se ne sono andati perché

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j)$$

$$> 0 \text{ (a meno che } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0)$$

↑ qui uso che $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono tutti > 0 .

Step 2 Esiste un s.sp. W di dim. $n-k$ su cui $q(x)$ è semidef. negativa, cioè $q(w) \leq 0$ per ogni $w \in W$.

Basta scegliere $W = \text{Span}(u_{k+1}, \dots, u_n)$

↑ ↑
autovettori corrispondenti
ad autovalori ≤ 0

Lo stesso conto di prima porta ad avere

$$q(w) = \lambda_{k+1} c_{k+1}^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \leq 0$$

Step 3 Supponiamo che esista $\forall$ s.sp. di dim $\geq k+1$ su cui $q(x)$ è def. positiva.

Dico che questo V interseca in modo non banale (cioè non solo in 0) il s.sp. W dello Step 2.

Questo segue da GRASSMANN

$$\dim(V \cap W) + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } n} = \underbrace{\dim V}_{\substack{\text{"}k+1 \text{ o più"} \\ n+1 \text{ o più}}} + \underbrace{\dim W}_{\text{"}n-k\text{"}}$$

↓
questo deve essere almeno 1

Che cosa succede in $V \cap W$?

Deve succedere contemporaneamente che $q > 0$ e $q \leq 0$, il che è assurdo.

— o — o —

Esempio 1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Calcoliamo la segnatura

Sylvester 2-1-3

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 2 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = -1 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = 0$$

C'è almeno un autovalore nullo

Volevamo c'è anche almeno un autov. positivo (traccia = 2)

Guardando la restrizione al 2×2 . Questo è equivalente a considerare la forma $q(x)$ solo rispetto alle prime due variabili, come se avessimo messo $z = 0$.

Questa forma ha $\det -1$, quindi ha segnatura $+-$, quindi esiste un sottospazio di dim 1 su cui $q(x)$ è def. negativa, quindi n_- è almeno uno.

Conclusione: autovalori $+ - 0$.

Esempio 2 Forma 4×4 . Facendo Sylvester troviamo segni

$++0-$

Qual è la segnatura?

$\text{Det}_{4 \times 4}$ è $-$, quindi le possibilità sono $+++ -$ e $+ - - -$.

La seconda si esclude. Perché? Se fosse $+ - - -$ allora

→ esisterebbe un s.sp. W di dim 3 su cui q è < 0

→ sappiamo che esiste un s.sp. V di dim 2 su cui q è > 0 , ed è il s.sp. generato dalle prime 2 variabili ($\text{Span}(e_1, e_2)$)

perché su questo posso applicare Sylvester classico $\uparrow \uparrow$ base canonica

Questo è assurdo perché $V \cap W$ è non banale per questioni di dimensione.

Esempio 3 Siano V e W s.sp. di $\mathbb{R}^{25}$.

Supponiamo $\dim V = 16$ e $\dim W = 11$.

Quanto può valere $\dim(V \cap W)$?

Risposta: MINIMO 2 MASSIMO 11

$$\text{GRASSMANN} \quad \dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
al min 2 al max 25

$\underbrace{\begin{matrix} 16 & 11 \\ 27 \end{matrix}}$

Facciamo un esempio in cui è 2

Prendiamo una base $e_1, \dots, e_{25}$. Poniamo

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16}) \rightarrow \dim 16$$

$$W = \text{Span}(e_{15}, e_{16}, \dots, e_{25}) \rightarrow \dim 11$$

$$V + W = \text{tutto } \mathbb{R}^{25} \text{ (c'è tutta una base)}$$

$$\text{Per Grassmann } V \cap W \text{ ha dim 2 } \rightsquigarrow \text{ è Span}\{e_{15}, e_{16}\}$$

Facciamo un esempio in cui è 11

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16})$$

$$W = \text{Span}(e_1, \dots, e_{11})$$

L'intersezione è tutto W .

Facciamo un esempio in cui è 7

$$V = \text{Span}(e_1, \dots, e_{16})$$

$$W = \text{Span}(e_1, \dots, e_7, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25})$$

Con queste scelte

$$V \cap W = \text{Span}(e_1, \dots, e_7) \rightsquigarrow \dim 7$$

$$V + W \rightsquigarrow \dim 20 \rightsquigarrow \text{Span}(e_1, \dots, e_{16}, e_{22}, \dots, e_{25}).$$

— 0 — 0 —