

Come cambia la matrice di un prod. scalare quando cambio base

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V in cui

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = y^t B x$$

Consideriamo una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$. Le comp. di $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nella nuova base sono $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Ora sappiamo che

$$x = M \hat{x}$$

$$y = M \hat{y}$$

M cambia dalla nuova alla vecchia

dove M è la matrice di cambio di base (colonne sono le comp. di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$ rispetto a $v_1, \dots, v_m$)

A questo punto

$$\hat{y}^t \hat{B} \hat{x} = y^t B x \quad \leadsto \quad \hat{y}^t \boxed{\hat{B}} \hat{x} = (M \hat{y})^t B M \hat{x} \\ = \hat{y}^t \boxed{M^t B M} \hat{x}$$

$\uparrow$
matrice nuova

da cui si ricava che $\hat{B} = M^t B M$

[Oss.] Abbiamo usato che se $y^t A x = y^t \hat{A} x$
per ogni x e y , allora $A = \hat{A}$

Questo è vero perché $e_j^t A e_i =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \uparrow \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{colonna } j \text{ di } A}} A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{colonna } i \text{ di } A}} =$$

"elemento a_{ji} "

Forma quadratica associata ad un prod. scalare

$$q(x) = \langle x, x \rangle = x^t B x$$

Ora $q(x)$ ha la sua segnatura (n_+, n_-, n_0) .

Teorema (Sylvesterizzazione)

Ogni matrice simmetrica B è congruente ad una matrice diagonale che ha sulla diagonale

→ n_+ volte 1

→ n_- volte -1

→ n_0 volte 0

dove n_+, n_-, n_0 sono la segnatura della forma quadratica associata.

Oss. Se la forma è definita positiva, allora diventa l'identità.

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = 1 \leadsto$ autov. ++ oppure --
quando la traccia è resta solo ++

$$q(x, y) = 5x^2 + y^2 + 4xy$$

Il prodotto scalare associato è $u = (x_1, y_1)$
 $w = (x_2, y_2)$

$$\langle u, w \rangle = 5x_1x_2 + y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

Voglio trovare una base u_1, u_2 in cui la matrice diventa l'identità.
Cosa deve succedere

$$\langle u_1, u_1 \rangle_B = 1$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle_B = \langle u_2, u_1 \rangle_B = 0$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle_B = 1$$

Stiamo cercando una base ortonormale
rispetto al prodotto scalare

Iniziamo a cercare ortogonale

$$v_1 = (1, 0)$$

Cerco v_2 ortogonale rispetto a v_1

Metodo banale $v_2 = (a, b)$ e impongo $\langle (1, 0), (a, b) \rangle = 0$
" $5a + 0 + 2b$

$$5a + 2b = 0$$

Una possibile soluzione è $(2, -5)$

Usando la matrice potevamo fare

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 5a + 2b \\ 2a + b \end{pmatrix} = 5a + 2b \quad ;$$

Metodo più generale Gram - Schmidt !

Partiamo dalla base canonica $e_1 = (1, 0)$

$$e_2 = (0, 1)$$

Poniamo

$$v_1 = e_1 = (1, 0)$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1$$

$$= (0, 1) - \frac{2}{5} (1, 0) = \left(-\frac{2}{5}, 1\right) \rightarrow \text{multiplo del prec.}$$

$$\langle e_2, v_1 \rangle_B = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

Quindi $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (2, -5)$ sono una base ortogonale.

Per renderla ortonormale basta dividere per la costante opportuna

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 5$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = 5$$

$$(2 \ -5) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (2 \ -5) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \quad \checkmark$$

Base Sylvestrizzante è $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5})$
con matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$[\text{Verifica: } M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

Esempio 2 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = B$

$$\text{Det} = -10 \rightsquigarrow \text{autovalori } + -$$

Scrivere l'equazione della retta perpendicolare al vettore $(1, 1)$.

Impongo $\langle (1, 1), (x, y) \rangle_B = 0$ cioè

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 4x+3y \end{pmatrix} = \boxed{6x+7y=0}$$

A quale matrice è congruente B? Dipende dalla segnatura della forma quadratiche, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Devo trovare una base v_1, v_2 tale che

$$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = -1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle_B = 0$$

In prima istanza ci basta $\langle v_1, v_2 \rangle_B = 0$ poi sistemiamo la prima e la seconda

$$\text{Sappiamo che } \langle (1,1), (7,-6) \rangle_B = 0$$

$$\text{Calcoliamo } \langle (1,1), (1,1) \rangle_B = 13$$

$$\langle (7,-6), (7,-6) \rangle_B = 2 \cdot 49 + 3 \cdot 36 - 8 \cdot 42 = -1$$

UNA

↓
La base ortonormale è

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}} \right)$$

— 0 — 0 —