

PRODOTTI SCALARI IN GENERALI

Def. Sia V uno sp. vett. (per noi di dimensione finita).

Un prod. scalare in V è una funzione $V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (INPUT: 2 vettori
OUTPUT: 1 numero)
che di solito si indica con $\langle x, y \rangle$ che verifica le seguenti proprietà

$$(i) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\text{simmetria})$$

$$\forall x \in V \quad \forall y \in V$$

$$(ii) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\forall x_1, x_2, y \in V$$

$$(iii) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\forall x \in V \quad \forall y \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(ii') \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$$(iii') \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

Oss. La (ii') segue da (i) + (ii). Infatti

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle y_1 + y_2, x \rangle = \langle y_1, x \rangle + \langle y_2, x \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (i)

Analogamente (iii') segue da (i) + (iii).

Esempio 1 $V = \mathbb{R}_{\leq 28}[x]$ Definisco

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{12}^{25} p(x) q(x) dx$$

Dico che è un prodotto scalare

• Prende in INPUT 2 polinomi e restituisce un numero

$$(i) \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle \quad \leadsto \text{ovvia}$$

$$(ii) \quad \langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle = \int_{12}^{25} (p_1(x) + p_2(x)) q(x) dx$$

$$\langle p_2(x), q(x) \rangle$$

$$= \int_{12}^{25} p_1(x) q(x) dx + \int_{12}^{25} p_2(x) q(x) dx = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle$$

$$(ii) \quad \langle \lambda p(x), q(x) \rangle = \lambda \langle p(x), q(x) \rangle$$

Esempio 2 $V = \mathbb{R}^3$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 7 x_2 y_2$ è un prodotto scalare

- Input : 2 vettori Output : 1 numero

(i) Se scambio x con y ottengo la stessa cosa

(iii) Se moltiplico x per λ , poi il λ si raccoglie

$$(ii) \quad \langle x + \hat{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \hat{x}, y \rangle$$

$$(x_1 + \hat{x}_1) y_1 + \dots + (x_n + \hat{x}_n) y_n$$

Esempio 3 V, x, y come sopra

$\langle x, y \rangle = x_1 y_2$ NON è un prod. scalare

NON È SIMMETRICO! Se $x = (1, 0, 0)$ e $y = (0, 1, 0)$, allora

$\langle x, y \rangle = 1$ mentre $\langle y, x \rangle = 0$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$ è un prod. scalare

$\langle x, y \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$ é uma PORCHERIA

(i) Ok (se scambio x con y resta uguale)

(iii) Se multiplico x per λ radico λ^2 sul 1° termine, e viene sul secondo

$$x = (1, 1, 0) \quad y = (1, 1, 1)$$

$$\langle x, y \rangle = 2$$

$$\langle 2x, y \rangle = 5 \neq 2 \langle x, y \rangle$$

Prodotti scalari e matrici

Sia $\langle x, y \rangle$ un prodotto scalare in V .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Allora come sempre scrivo in modo unico

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

Allora

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle$$

Tocchiamo con mano per $n=2$

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$y = y_1 v_1 + y_2 v_2$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 v_1 + x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle &= \langle x_1 v_1, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle + \langle x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle \\ &= x_1 \langle v_1, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle + x_2 \langle v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$= x_1 (y_1 \langle v_1, v_1 \rangle + y_2 \langle v_1, v_2 \rangle) + x_2 (y_1 \langle v_2, v_1 \rangle + y_2 \langle v_2, v_2 \rangle)$$

$$= x_1 y_1 \langle v_1, v_1 \rangle + x_1 y_2 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{uguali}}} + x_2 y_1 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{uguali}}} + x_2 y_2 \langle v_2, v_2 \rangle$$

Conseguenza Se conosco tutti i prodotti $\langle v_i, v_j \rangle$ tra due qualunque elementi della base, allora so fare il prodotto tra due qualunque vettori.

Ad ogni prodotto scalare, scelta una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V associamo la matrice $n \times n$ che chiamiamo B con

$$b_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Si tratta di una matrice SIMMETRICA.

A quel punto la formula di prima ci dice che

$$\langle x, y \rangle = y^t B x$$

↑ ↑
componenti di y messe in riga dal trasposto componenti di x messe in colonna

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$
 $y = (y_1, y_2)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3 x_2 y_2$$

(verificare che sia un prod. scalare)

Prendiamo in $\mathbb{R}^2$ la base canonica e_1, e_2 . Chi è la matrice B ?

$$b_{1,1} = \langle e_1, e_1 \rangle = 0$$

$$b_{1,2} = \langle e_1, e_2 \rangle = 1 \quad (\text{si salva solo il } 1^\circ)$$

$$b_{2,1} = \langle e_2, e_1 \rangle = 1 \quad (\text{si salva solo il } 2^\circ)$$

$$b_{2,2} = \langle e_2, e_2 \rangle = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{(y_1 \ y_2)}_{y^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_y = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$
$$= y_1 x_2 + y_2 x_1 - 3 x_2 y_2$$

Domande

① Se cambio la base, come cambia la matrice

② Se scelgo bene la base, quanto semplice può diventare la matrice

↓ (Sylvesterizzazione)

Risposta ③ Se M è la matrice di cambio di base
(le colonne sono le componenti dei vettori della nuova
base rispetto alla vecchia) allora la nuova matrice
diventa

$$M^t B M$$

Def. Due matrici B_1 e B_2 si dicono CONGRUENTI se esiste M
invertibile tale che

$$B_2 = M^t B_1 M$$

— o — o —