

Esempio 1 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = A$

Trovare la forma canonica sui reali e sui complessi.

Passo 1 Calcolo dei autovalori $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm \sqrt{-1} = 4 \pm i \quad \text{autovalori complessi coniugati}$$

Ora sappiamo che

→ sui reali NON è diagonal. (autov. non reali)

→ sui complessi è diagonalizzabile (autovalori diversi)

Passo 2 Su $\mathbb{C}$ la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 4+i & 0 \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} = D$

Si tratta di trovare M invertibile tale che

$$D = M^{-1} A M$$

Fatto generale: M ha come colonne i rispettivi autovettori

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4+i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+y = (4+i)x \\ -2x+5y = (4+i)y \end{cases} \quad \begin{cases} (-1-i)x+y=0 \\ -2x+(1-i)y=0 \end{cases}$$

Poniamo $y=2$ e dalla seconda equazione troviamo $x=1-i$.

Osserviamo che risolve la prima equazione pure! $\leftarrow$ Deve succedere

Quindi $(1-i, 2)$ è un autovettore relativo a $4+i$

Sospetto fortemente che

$(1+i, 2)$ sia autovettore relativo a $4-i$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i \\ 8-2i \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} (4-i) \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} (4-i)(1+i) &= 4+4i-i+1 \\ &= 5+3i \quad \checkmark \end{aligned}$$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Verificare per esercizio che $M^{-1} A M = D$.

Passo 3 Su $\mathbb{R}$ la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = J$ che è la matrice di jordan reale prodotta a partire da quella diagonale complessa.

Cerchiamo ora M , matrice 2×2 REALE invertibile, tale che

$$M^{-1} A M = J$$

Le colonne di M sarebbero la base "jordanizzante".

Chi sarebbero le colonne di questa M . Sono due vettori v_1 e v_2 tali che

$$A v_1 = 4 v_1 - v_2$$

$$A v_2 = v_1 + 4 v_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ A v_1 & A v_2 \end{matrix}$

v_1 e v_2 sono le parti reali e immaginari di un autovettore complesso relativo a $4+i$, quindi nel vostro caso

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perché funziona? Supponiamo $v = v_1 + i v_2$ sia autovettore di A relativo a $a + ib$. Questo vuol dire che

$$A(v_1 + i v_2) = (a + ib)(v_1 + i v_2)$$

$$A v_1 + i A v_2 = a v_1 + i a v_2 + i b v_1 - b v_2$$

Se uguagliamo le parti reali e immaginarie troviamo

$$A v_1 = a v_1 - b v_2$$

$$A v_2 = b v_1 + a v_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

cioè esattamente quello che serve.

Nel vostro caso $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica $M^{-1} A M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

— 0 — 0 —

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare forma canonica
reale e complessa

Passo 1

Autovalori

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Quindi $\lambda = 2$ è autovalore con $m_a = 2$.

Calcolo m_g

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 1 \\ \Rightarrow m_g = 1$$

$\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile, né in $\mathbb{C}$ né in $\mathbb{R}$.

Fatto 2 La forma di Jordan (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è lo stesso) ha $\lambda = 2$ sulla diagonale e ha un unico blocco, per forza 2×2
 $\uparrow$
 $m_g = 1$

Quindi

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatto 3 Cerco M (2×2 invertibile) tale che $M^{-1} A M = J$.

Chi sono le colonne di M ? Sono due vettori v_1 e v_2 tali che

$$A v_1 = 2 v_1 \quad \rightsquigarrow v_1 \text{ è autovettore di } A \text{ relativo a } \lambda = 2$$

$$A v_2 = v_1 + 2 v_2 \quad (\text{si vede a occhio che } (1, -1) \text{ va bene})$$

Adesso cerco ovviamente v_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3x + y = 1 + 2x \\ -x + y = -1 + 2y \end{cases}$$

$$A v_2 = v_1 + 2 v_2$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad \text{Una possibile soluzione è } (1, 0)$$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Fare verifica per esercizio

Esempio 3

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Domanda: per quali valori di a e b sono simili?

Fatto 1 Se $a \neq 5$ e $a \neq 2$ allora la prima è di sicuro diagonalizzabile, qualunque sia il valore di b .

Quindi in questi casi sono simili per forza.

Fatto 2 Se $a = 2$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e per essere diagonalizzabile serve che $m_g(2) = 2 = m_a(2)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Questa ha } \dim(\ker) = 2 \text{ se e solo se}$$

Rango = 1, cioè se e solo se $b = 0$

Se $a = 2$ e $b = 0$ allora sono simili, altrimenti la prima è simile a

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatto 3 Se $a = 5$ la matrice diventa

Devo vedere quando $m_g(5) = 2$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - 5Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Come prima ha rango } = 1 \text{ se e solo se}$$

$b = -9$

Quindi $a = 5$ e $b = -9 \Rightarrow$ simili, altrimenti A è simile a

— 0 — 0 —

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$