

Def. Un blocco di jordan $k \times k$ è una matrice $k \times k$ che ha un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ ripetuto sulla diagonale, tutti 1 sopra la diagonale e tutti 0 altrove.

Una matrice di jordan è una matrice quadrata ottenuta allineando dei blocchi di jordan lungo la diagonale (il resto sono 0)

Esempi Blocchi di jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}$$

1×1

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2×2

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

3×3

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

4×4

Ovviamente il λ può essere a sua volta 0 oppure 1 (o un altro numero)

Matrici di jordan (i numeri "mancauti" sono tutti 0)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 32 & 1 \\ & & & 32 & 1 \\ & & & & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Oss. Una matrice diagonale è una speciale matrice di jordan, in cui tutti i blocchi sono da 1×1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorema misterioso (Jordan sui complessi)

Sia A una matrice quadrata con elementi reali o complessi. Allora A è simile ad una matrice di Jordan eventualmente complessa (cioè il λ sulla diagonale può essere un numero complesso). Inoltre

- (1) i numeri che compaiono lungo la diagonale sono gli n autovalori della matrice, contati con molteplicità (sui complessi esistono sempre)
- (2) ogni autovalore λ compare $m_a(\lambda)$ volte (mult. algebrica)
- (3) per ogni autovalore λ , il numero di blocchi è uguale a $m_g(\lambda)$ (in particolare, se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, allora tutti i blocchi di λ sono da 1×1) cioè uguale a $\dim(\ker(A - \lambda \text{Id}))$
- (4) per ogni autovalore λ , il numero di blocchi di $\dim \geq k$ è

$$\dim(\ker(A - \lambda \text{Id})^k) - \dim(\ker(A - \lambda \text{Id})^{k-1})$$

Oss. Cosa succede se prendo un blocco di Jordan e sottraggo λId ?

Sopravvivono solo gli 1 sopra.

Cosa succede se faccio potenze di questi?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatto generale: dato un blocco di Jordan con 0 sulla diagonale, quando calcolo le sue potenze gli 1 si muovono di un livello verso alto-destra. Ogni volta ne sparisce uno. Ad ogni passaggio il rango scende di 1 e $\dim(\ker)$ sale di 1. Su questo fatto si basa il punto (4) del teorema misterioso.

Def. Un blocco di jordan reale $2k \times 2k$ (dimensione pari) è una matrice che ha

→ lungo la diagonale dei blocchi 2×2 della forma indicata a lato

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

→ al livello "sopra" delle matrici identità 2×2

Esempi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2×2

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

4×4

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & & \\ -b & a & 0 & 1 & & \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{bmatrix}$$

6×6

il resto sono zeri

Def. Una matrice di jordan reale è una matrice ottenuta mettendo di fila sulla diagonale

→ dei blocchi "normali" con λ reali sulla diagonale

→ dei blocchi del nuovo tipo

Esempi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & -7 \\ & & & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ & 7 \end{bmatrix}$$

4×4

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \\ & & 4 & 5 \\ & & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema misterioso (Jordan sui reali)

Sia A una matrice quadrata con elementi reali.

Allora A è simile ad una matrice di Jordan reale.

Inoltre la struttura della matrice di Jordan è la seguente

(1) i numeri reali che appaiono sulla diagonale dei blocchi "standalone" sono gli autovalori reali contati con molteplicità, e vale tutto quello che valeva nel caso complesso

(2) ogni blocco 1×1 nel caso complesso con $a+ib$ sulla diagonale produce un blocco 2×2 del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(nota bene: se $a+ib$ è autovalore, allora

anche $a-ib$ è autovalore, tra l'altro con la

stessa molteplicità alg. e geom., quindi stiamo sostituendo

$$\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(3) ogni blocco $k \times k$ con $a+ib$ sulla diagonale diventa un blocco reale con k volte $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e le identità 2×2 sopra

(nota bene: ad ogni blocco complesso con $a+ib$ sulla diagonale ne corrisponde (se A è reale) uno uguale con $a-ib$ sulla diagonale)

Esempi Traduzioni da Jordan complesso a Jordan reale

$$\begin{pmatrix} \boxed{2+3i} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2-3i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2+3i & 1 & & \\ 0 & 2+3i & & \\ & & 2-3i & 1 \\ & & 0 & 2-3i \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{array} \right)$$

il resto sono 0

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & & \\ -3 & 2 & 0 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & -3 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{array} \right)$$

Il resto sono 0

— 0 — 0 —