

CARTESIO**Teorema misterioso** (di Analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n a coeff. reali con n radici reali, contate con molteplicità (questo accade per i pol. conatt. delle matrici simmetriche).

Allora (posso prevedere il segno delle radici)

- il numero di radici nulle è l'esponente della + piccola potenza di x che compare nel polinomio (è 0 se c'è il termine noto non nullo)
- il numero di radici positive è il numero di variazioni di segno tra i coeff. del polinomio
- il numero di radici negative si ottiene per differenza

Esempio $p(x) = x^5 - x^3$

→ le radici nulle sono 3 perché x^3 è la + piccola potenza di x

→ le radici positive sono 1 (i coeff. del pol. sono $+ -$)

→ le radici neg. sono 1

Riprova: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x+1)(x-1)$
 $x=0 \rightsquigarrow$ mult 3 e poi $x = \pm 1$.

[La parte facile del teo. è il numero di radici nulle]

Utilizzo pratico: calcolo $p_x(x)$ e concluso usando il teorema.
Però non mi aiuta a trovare sottospazi su cui $q(x)$ risulta positiva o negativa.

SYLVESTER

Versione basic

Sottotitolo: MINORI ORLATI

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 4 \\ 1 & \boxed{2} & 0 \\ 4 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

ALGORITMO

- Parto da in alto a sx e considero tutte le sottomatrici $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots$ ottenute ORLANDO la precedente
- Calcolo tutti i loro determinanti
- SPERO siano tutti $\neq 0$
- Scrivo di fila i loro segni $+ - - + - -$
- Aggiungo a sx un + d'ufficio
- n_+ = numero di permanenze di segno
 n_- = numero di variazioni di segno

Nell'esempio: $\det_{1 \times 1} = 3$, $\det_{2 \times 2} = 5$, $\det_{3 \times 3} = -6 - 32 + 1 = -37$

+ + + -
↑
d'ufficio P P V

$$n_+ = 2 \quad e \quad n_- = 1$$

Versione basic = Sylvester 1-2-3

Varianle: Sylvester 3-2-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

Sylvester 2-3-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \boxed{*} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

1° passaggio: 2ª riga e colonna

2° passaggio: 2ª e 3ª riga e colonna

3° passaggio: tutta la matrice

Sylvester 1-3-2

1° passaggio

2° passaggio

3° passaggio

$$\begin{array}{ccc} \boxed{*} & * & \boxed{*} \\ * & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} \end{array}$$

Esempio Determinare, al variare del parametro a , la segnatura della forma di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = ay^2 + z^2 + 4xy - 2xz + 6yz$$

Sylvester 1-2-3 no male subito

Sylvester 3-2-1

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = a - 9 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = -6 - 6 - a - 4 = -a - 16$$

Ora devo discutere il segno di 2 determinanti, e avrei anche problemi quando $a = 9$, oltre ovviamente nel caso $a = -16$

$$\text{Sylvester } 3-1-2 : \quad \text{Det}_{1 \times 1} = 1 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = -1 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = -a - 16$$

Distinguiamo 3 casi

- Se $-a - 16 > 0$, cioè $a < -16$, allora
quindi $m_+ = 1$, $m_- = 2$, $m_0 = 0$

d'ufficio

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \\ \cup & \cup & \cup \\ P & V & V \end{array}$$

(se uno non ricorda se m_+ dipende da P o V , basta pensare a cosa accade per una matrice diagonale)

- Se $-a - 16 < 0$, cioè $a > -16$, allora
quindi $m_+ = 2$, $m_- = 1$, $m_0 = 0$

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \\ \cup & \cup & \cup \\ P & V & P \end{array}$$

- Se $a = -16$, allora Sylvester non funziona immediatamente.

Però in questo caso

→ $n_0 \geq 1$ perché c'è un autovalore nullo (almeno)

→ $n_+ \geq 1$ perché c'è almeno una direzione di positività
cioè $\text{Span}(0,0,1)$

→ $n_- \geq 1$ perché ... negatività, cioè $\text{Span}(0,1,0)$

Poiché la somma deve fare 3, per forza $n_+ = n_- = n_0 = 1$

Casi in cui Sylvester non può funzionare

→ quando il Det generale si annulla

→ quando sulla diagonale sono tutti 0, cioè la forma quadratica ha solo termini misti

Esempio facile $q(x,y) = xy$

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \quad + \quad -$$

Esempio meno facile $q(x,y,z) = 4xy + 6xz - 8yz$

1° modo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -24 - 24 = -48$$

→ autovalori $- \quad - \quad -$ opp. $\boxed{++-}$
↑
NO BUONO perché $\text{Tr} = 0$

2° modo Proviamo a completare i quadrati

$$4xy + 6xz - 8yz = (x+y+\alpha z)^2 - (x-y+\beta z)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)z^2$$

Scegliendo bene α e β , riesco a sistemare xz e yz ?

$$2\alpha - 2\beta = 6 \quad \text{coeff. di } xz \quad \leadsto \text{risolvendo il sistema trovo } \alpha \text{ e } \beta$$

$$2\alpha + 2\beta = -8 \quad \text{coeff. di } yz$$

devono essere lin. indep.

Oss. Occhio a non fare

$$2x^2 + y^2 = \overset{\uparrow}{x^2} + \overset{\uparrow}{x^2} + y^2 \text{ e dire che sono } 3+!!!$$

— 0 — 0 —