

Domanda: data una forma quadratica $q(x)$

→ come determino n_+ , n_- , n_0 ?

→ come trovo dei sottospazi di dimensione max su cui $q(x)$ è sempre > 0 oppure < 0 ?

[Questi sono decisamente non unici]

Avremo 4 metodi

- ① Segno autovalori
- ② Completamento dei quadrati
- ③ SYLVESTER
- ④ CARTESIO

1 - Segno autovalori

Data la forma, scrivo la matrice A che la rappresenta. Essendo A simmetrica, questa avrà n autovalori (eventualmente con molteplicità)

Ebbene

→ n_+ = numero autovalori positivi

→ n_- = " " negativi

→ n_0 = " " nulli [è la molteplicità di 0]

Per trovare UN s.sp. di dimensione n_+ su cui q è positiva basta prendere lo span degli autovettori con. agli autovalori positivi e idem per n_-

Oss. Il metodo diventa complicato in dimensione alta

Esempio 1 $q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 6xy$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \quad \text{quindi sono uno + e uno -}$$

Oss. A noi bastava sapere il segno.

$$\text{Det} = 6 - 9 = -3 = \text{prodotto autovalori, per cui sono + e -}$$

Quindi $m_0 = 0$, $m_+ = 1$, $m_- = 1 \leadsto$ è INDEFINITA

Nella pratica è scomodo trovare gli autovettori.

Esistono coppie (x,y) per cui $q(x,y) > 0$, ad esempio $q(1,0) > 0$
 " " " " " $q(x,y) < 0$ e queste si vedono uno

Esempio 2 Determinare per quali valori del parametro a la forma quadratica

$$q(x,y) = ax^2 + 3y^2 + 2xy$$

risulta definita positiva ($m_+ = 2$, $m_- = m_0 = 0$)

Scrivo la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$

e cerco di capire il segno degli autovalori

$$\text{Det } A = 3a - 1 \quad \text{e deve essere } > 0, \text{ quindi } a > \frac{1}{3}$$

• Se $a < \frac{1}{3}$, allora $\text{Det} < 0 \leadsto$ autovalori + -

• Se $a > \frac{1}{3}$, allora $\text{Det} > 0 \leadsto$ autovalori ++ oppure --, ma
 Traccia $A = 3 + a > 0$, quindi sono ++ $\leadsto$ definita positiva

• Se $a = \frac{1}{3}$, allora gli autovalori sono 0 e $\frac{10}{3} = \text{Traccia}(A)$

COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

Corco di scrivere $q(x)$ come somma o differenza di quadrati di rda linearmente indipendente. A quel punto

→ m_+ = numero dei termini con il segno +

→ m_- = " " " " " " -

→ m_0 si ottiene per differenza.

Esempio 3 $q(x, y) = x^2 + 6xy - 2y^2$

$$q(x, y) = \underbrace{x^2 + 6xy + 9y^2}_{(x+3y)^2} - 9y^2 - 2y^2$$

$$= (x+3y)^2 - 11y^2 = \text{differenza di 2 quadrati} \\ - (\sqrt{11}y)^2$$

$$m_+ = 1, \quad m_- = 1, \quad m_0 = 0$$

Come trovo un sottospazio su cui $q(x, y) > 0$. Basta porre $= 0$

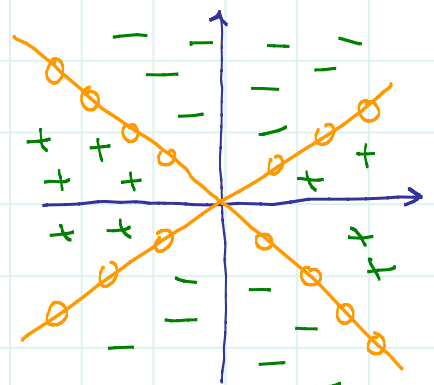
quello che ha il segno -, quindi $y=0$, quindi $\text{Span}(1, 0)$

Analogamente, se voglio il segno -, basta porre $= 0$ quello con il segno +, quindi $x+3y=0$, cioè $\text{Span}(-3, 1)$

Volendo, ora ho anche la descrizione completa delle zone + e - perché

$$q(x, y) = (x+3y)^2 - 11y^2 \\ = (x+3y+\sqrt{11}y)(x+3y-\sqrt{11}y)$$

↑
equazioni delle due rette
che separano le zone



Esempio 4

$$q(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 6xy$$

Proviamo a completare i quadrati

$$q(x, y) = 2(x^2 + 3xy) + 3y^2$$

$$= 2\left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2\right) + 3y^2$$

↑
doppio prodotto
di x e $\frac{3}{2}y$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{2}y^2 + 3y^2$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{3}{2}y^2$$

Come già sapevamo $m_+ = 1$ e $m_- = 1$ e $m_0 = 0$.

Come ottengo un sottospazio su cui $q(x, y) < 0$?

Basta porre $x + \frac{3}{2}y = 0$, quindi $\text{Span}(3, -2)$

Verifica: $q(3, -2) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot (-2) = 18 + 12 - 36 = -6 < 0$ ✓

Esempio 5

$$x^2 + y^2 + 4xy + 6xz = q(x, y, z)$$

$$\underbrace{x^2 + 4xy + 6xz + y^2}_{+12yz - 12yz} = \underbrace{x^2 + 4xy + 6xz}_{+12yz - 12yz} + \underbrace{4y^2 - 4y^2}_{+12yz - 12yz} + \underbrace{9z^2 - 9z^2}_{+12yz - 12yz} + y^2$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3y^2 - 9z^2 - 12yz$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3(\underbrace{y^2 + 4yz + 3z^2})$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 3(y^2 + 4yz + 4z^2 - 4z^2 + 3z^2)$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 3(y+2z)^2 + 3z^2$$

Quindi $m_+ = 2$ e $m_- = 1$ (e quindi $m_0 = 0$)

[Dalla matrice anzi visto che $\det A < 0$ $\leadsto$ autovalori possono essere $++-$ oppure $---$, ma essendo $\text{Traccia}(A) = 2$ escludendo $---$]

Come trovo un s.sp. di dim 2 su cui è > 0 ?

Basta porre $y+2z = 0 \leadsto \text{Span}((0, -2, 1), (1, 0, 0))$

Come trovo un s.sp. di dim 1 su cui è < 0 ?

Impongo $\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \leadsto \text{Span}(2, -1, 0)$

— 0 — 0 —