

FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di grado 2 nelle n variabili.

Esempi In dimensione 2 una f.q. si scrive come

$$q(x, y) = a x^2 + b y^2 + c x y$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 coefficienti, cioè numeri dati

In dimensione 3 si scrive come

$$q(x, y, z) = a x^2 + b y^2 + c z^2 + d x y + e x z + f y z$$

Forme quadratiche e matrici Ad ogni forma quadratica possiamo associare una matrice simmetrica A in modo tale che

$$q(x) = x^t A x$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 vettore

Esempio 1 $q(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 6xy$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale i coeff. di x^2 e y^2
 Fuori dalla diag. $\rightarrow \frac{1}{2}$ coeff. di xy

$$\begin{aligned}
 (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x \ y) \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 3y \end{pmatrix} = 2x^2 - 3xy - 3xy + 3y^2 \\
 &= 2x^2 - 6xy + 3y^2
 \end{aligned}$$

Esempio 2

$$q(x, y, z) = x^2 - 7y^2 + yz - 6xz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Per verifica controllare che

$$(x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ venga quello che deve venire}$$

Esempio 3

$$q(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 4 Consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare la corrispondente forma quadratica

$$q(x, y, z, w) = x^2 - y^2 + 3z^2 + 14xy - 4xz + 2xw + 2yw + 4zw$$

Conclusione: esiste corrispondenza biunivoca tra matrici $n \times n$ simmetriche e forme quadratiche

DOMANDA Data una forma quadratica $q(x)$ in n variabili, cosa posso dire del **SEGNO** di $q(x)$ al variare di x in $\mathbb{R}^d$.

Possibili situazioni

Una forma quadratica si dice

- **DEFINITA POSITIVA** se $q(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ↑
vettore nullo
- **DEFINITA NEGATIVA** se $q(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **SEMIDEFINITA POSITIVA** se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- **SEMIDEFINITA NEGATIVA** se $q(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- **INDEFINITA** se non ricade in nessuno dei casi precedenti, cioè esiste $x_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_1) > 0$ ed esiste $x_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_2) < 0$.

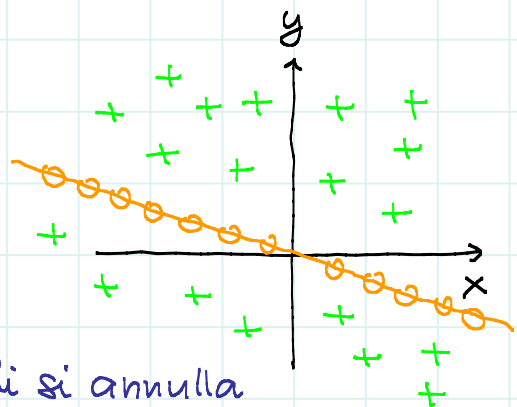
Oss. Se $q(x)$ è definita positiva, allora si intende che è anche semidefinita positiva.

Esempio 1 $q(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

Questa è definita positiva

Esempio 2 $q(x, y) = x^2 + 9y^2 + 6xy$

Osservo che $q(x, y) = (x + 3y)^2 \geq 0$ e quindi si annulla per $y = -\frac{1}{3}x$, quindi per ∞ valori di x e y



Pseudiamo $q(-3,1) = 9 + 9 + 6(-3) \cdot 1 = 18 - 18 = 0$

In questo caso la forma è SEMIDEFINITA POSITIVA, ma non definita positiva.

Esempio 3 $q(x,y) = x^2 - 4y^2$

Si vede subito che è indefinita

$$q(1,0) = 1$$

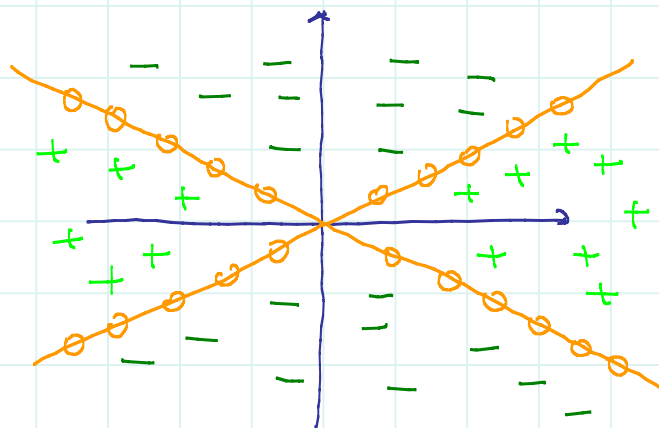
$$q(0,1) = -4$$

Cerchiamo di capire le zone + e -

$$q(x,y) = (x+2y)(x-2y)$$

Le zone di annullamento sono

$$x = \pm 2y \quad \leadsto \quad y = \pm \frac{1}{2}x$$



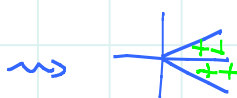
Bisognerebbe distinguere i casi

$$x+2y > 0$$

$$y > -\frac{1}{2}x$$

$$x-2y > 0$$

$$y < \frac{1}{2}x$$



Analogamente per le altre 4 zone.

Esempio 4 $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

Anche questo è indefinito

$$q(1,0,0) > 0$$

$$q(0,0,1) < 0$$

Come sono fatte le zone?

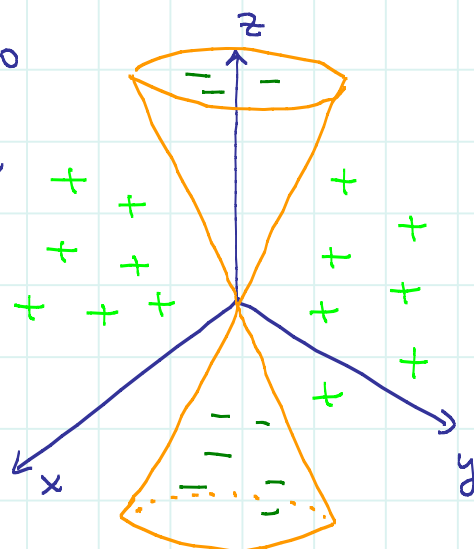
$$q(x,y,z) > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Segno - dentro
cono

Segno + fuori
dal cono



SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica $q(x)$ in n variabili sono associati 3 numeri

$$n_0 \quad n_+ \quad n_-$$

talvolta detti INDICI DI INERZIA tali che

$$n_0 + n_+ + n_- = \text{dimensione}$$

- dove
- $\rightarrow n_+ =$ massima dimensione di un sottospazio su cui la restrizione di q è definita positiva
 - $\rightarrow n_- =$ massima ... definita negativa
 - $\rightarrow n_0 =$ per ora è definito per differenza in modo da far tornare la somma.

Back to esempio 3 $n_+ =$ max dimensione di un s.sp. contenuto nella zona +
 $= 1$ (rette)
 $n_- = 1$ per lo stesso motivo
 $n_0 = 0$

Back to esempio 4 $n_+ = 2$ (ad esempio piano xy)
 $n_- = 1$ (ad esempio asse z)
 $\leadsto n_0 = 0$