

Allora $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, cioè $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$

Dim. tes. spettrale in versione matriciale, freccia "difficile"

Ipotesi: A è simmetrica

Tesi: A si diagonalizza mediante matrice ortogonale, cioè esiste base ortonormale di autovettori.

Sappiamo che tutti gli autovalori sono reali, quindi almeno uno c'è.

Chiamiamolo λ_1 e sia v_1 un autovettore corrispondente.

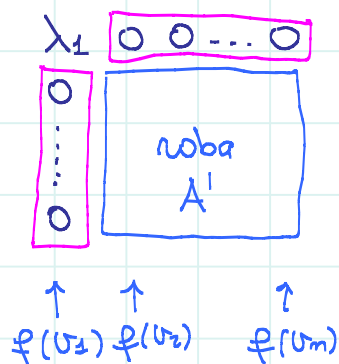
Almeno di moltiplicarlo per q. cosa posso supporre che $\|v_1\| = 1$.

Considero $W = \text{span}(v_1) =$ tutti i multipli di v_1

Essendo v_1 autovettore sappiamo che W va a finire in se stesso, cioè $Aw \in W$ per ogni $w \in W$.

Ma allora anche $W^\perp$ va a finire in se stesso.

Quindi in una base $v_1, \underbrace{v_2, \dots, v_m}_{W^\perp}$ la matrice diventa



Adesso volendo posso procedere per induzione oppure dire a mano ... prendo un altro autovalore λ_2 (magari uguale al precedente) e procedo allo stesso modo.

Formalmente è una riduzione sulla dimensione dello spazio, perché A' è una matrice $(m-1) \times (m-1)$ che è ancora simmetrica più di scegliere $v_2, v_3, \dots, v_m$ ortogonale.

— $\circ$ — $\circ$ —

Esercizio 1 $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ a & 5 \end{pmatrix} = A$

Si diagonalizza di LUSO (con M ortogonale) se e solo se $a=7$

(1) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali

Facciamo $P_A(\lambda) = \text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 7 \\ a & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 7a$
 $= \lambda^2 - 6\lambda + 5 - 7a$

Troviamo le radici

$$\Delta = 9 - 5 + 7a = 4 + 7a$$

Distinguiamo 3 casi

→ $4 + 7a < 0$, cioè $a < -\frac{4}{7}$. Autovalori complessi (diversi) coniugati. Quindi A è diagonalizzabile sui complessi, ma non sui reali

→ $4 + 7a > 0$, cioè $a > -\frac{4}{7}$. Due autovalori REALI DISTINTI.

Allora è verificata la cond. suff.

(n autov. reali distinti). Di sicuro A è diag. sui reali, quindi

$$M^{-1} A M = D$$

↑ ha autovalori sulla diagonale
 ↑ ha come colonne i rispettivi autovettori

→ $4 + 7a = 0$, cioè $a = -\frac{4}{7}$. Un unico autovalore con molteplicità ALGEBRICA = 2. Occorre vedere la geometrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -\frac{4}{7} & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ è l'autovalore

$$\dim(3) = \dim(\ker(A - 3I)) = 1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -\frac{4}{7} & 2 \end{pmatrix}$$

ranko = 1

Quindi $m_a(3) = 2$ e $m_g(3) = 1 \Rightarrow$ ad alio diagonalizzabilità

Esercizio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Essendo simmetrica, questa è anche diag. di lusso

Fatto 1 Gli autovalori sono tutti reali
Basta osservare che è simmetrica

Fatto 2 $\lambda = 0$ è autovalore con $m_g(0) = 2$ e quindi $m_a(0) \geq 2$
Rango = 2 (2 colonne lin. indip.) $\Rightarrow \text{Dim}(\ker) = 2$, ma
 $\ker$ = autospazio dell'autovalore 0.
Base di $\ker$: $(1, 0, -1, 0)$ $(0, 2, 0, -2)$

Fatto 3 $\lambda = 6$ è autovalore con molteplicità alg. e geom. ≥ 1
(Basta osservare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ va a finire in $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$)

Fatto 4 $\lambda = -2$ è il restante autovalore
Basta osservare che $\text{Traccia}(A) = 4 = \text{somma autovalori}$,
quindi per forza ci deve essere -2 . Autovett. prob. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quindi il quadro completo degli autovalori è

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow m_g(0) = m_a(0) = 2$
- $\lambda = 6 \rightsquigarrow m_g(6) = m_a(6) = 1$
- $\lambda = -2 \rightsquigarrow m_g(-2) = m_a(-2) = 1$

Quindi A è simile a Come ottengo M . Uso come colonne dei rispettivi autovettori

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —