

Def Sia V uno spazio vettoriale e sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Si dice che f è **SIMMETRICA** se "migra nei prodotti scalari" cioè

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in V \quad \forall w \in V$$

Def. Una matrice quadrata A si dice **SIMMETRICA** se

$$A = A^t$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 9 & 5 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

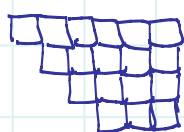
Esempio Da quanti parametri dipende una 3×3 simmetrica?
E una $n \times n$ simmetrica?

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$\leadsto 6$ parametri

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \leadsto 2 \text{ parametri}$$

In generale, posso scegliere come mi pare i fermi sulla diagonale principale e quelli sopra. A quel p.to sotto devo "copiare"



1° modo I modi sono

$$\begin{matrix} n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ 1^{\text{a}} \text{ riga} & & 2^{\text{a}} \text{ riga} & & 3^{\text{a}} \text{ riga} & & & & \text{ultima riga} \end{matrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

2° modo Posso scegliere gli n elementi sulla diagonale più metà degli altri, quindi

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{el. sulla diagonale} \quad \text{metà degli altri} \quad \text{😊}$$

Prop. L'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ è uno spazio vettoriale di dim $\frac{n(n+1)}{2}$

Dim Due verifiche quasi ovvie

→ Somma Se $A = A^t$ e $B = B^t$, allora

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B$$

→ Prodotto Se $A = A^t$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$

La dimensione segue dai conti fatti prima.

Esercizio Scrivere una base dello spazio delle matrici 3×3 simmetriche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione Sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Allora f è simmetrica come applicazione se e solo se ogni matrice che rappresenta f usando in partenza ed arrivo una stessa base ORTONORMALE è simmetrica.

Dim Ci sono due cose da dimostrare

Appl. simm. $\Rightarrow$ matrice simm. Supponiamo di aver scelto una base $v_1, \dots, v_n$ di V ortonormale.

Allora chi è a_{ij} (elemento che nella matrice sta nella riga i e colonna j)?

$$\begin{array}{c} \circledast \\ \uparrow \\ f(v_j) \end{array} \quad \leftarrow v_i$$

$a_{i,j}$ è la componente di $f(v_j)$ rispetto a v_i . Ma le componenti rispetto ad una base ortonormale si calcolano facendo i prodotti scalari. Ma allora

$$a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f. simm.}}}{\langle v_j, f(v_i) \rangle} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{componente di } f(v_i) \text{ rispetto a } v_j}}{a_{j,i}}$$

Quindi $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni scelta di i e j , quindi la matrice è simmetrica.

Matrice simmetrica $\Rightarrow$ applic. simm. Osservazione preliminare:

calcolare il prodotto scalare $\langle x, y \rangle$ è equivalente a fare $x^t y$
 $\uparrow$
 vettori colonna $= \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

Consideriamo ora due vettori v e w in V e siano x e y i vettori colonna delle loro componenti rispetto ad una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$.

$$\text{Allora } \langle f(v), w \rangle = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di } f(v)}}{Ax}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di } w}}{y} \rangle = (Ax)^t y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasposto del prodotto}}}{x^t A^t} y$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ A=A^t}}{x^t A} y = \langle x, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di } v}}{Ay} \rangle = \langle v, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. di } f(w)}}{f(w)} \rangle$$

Quindi abbiamo ottenuto che $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$
 usando che la matrice era simmetrica.

— o — o —

TEOREMA SPETTRALE (AKA diagonalizzazione di lusso)

Teorema (versione applicazioni)

Sia $f: V \rightarrow V$ lineare. Allora f è simmetrica (cioè migra nei prodotti scalari) se e solo se V ammette una base ORTONORMALE costituita da autovettori di f . Detto altrimenti, esiste una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$ di V tale che

$$f(v_i) = \lambda_i f(v_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Teorema (versione matrici)

Sia A una matrice $n \times n$. Allora A è simmetrica (cioè $A = A^t$) se e solo se A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste M matrice $n \times n$ ortogonale ($M^{-1} = M^t$) tale che

$$\overset{\uparrow}{M^t} M^{-1} A M = D \leftarrow \text{matrice diagonale}$$

Parte facile (versione matrici)

Supponiamo che $M^{-1} A M = D$ con M ortogonale. Allora A è simm.

Ricavo A :

$$A = M D M^{-1} = M D M^t$$

Ma allora

$$A^t = (M D M^t)^t = \underset{\uparrow M}{(M^t)^t} \underset{\uparrow D}{D^t} M^t = M D M^t = A$$

Parte facile (versione applicazioni)

Supponiamo esista base ortonormale fatta di autovettori.

In questa base la matrice diventa diagonale, quindi simmetrica.

Per la prop. precedente matrice simm $\Rightarrow$ prop. simm.

Lemma 1 (Non serve nella dim., ma è istruttivo)

Se v e w sono autovettori di f corrispondenti ad autovalori distinti, allora v e w sono ortogonali (se f è simmetrica).

Dim] Sia $f(v) = \lambda v$ e $f(w) = \mu w$ con $\lambda \neq \mu$. Allora

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

Quindi $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$, quindi per forza $\langle v, w \rangle = 0$
 $\uparrow$
 $\neq 0$

Lemma 2 Sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

Supponiamo che $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$
e f simmetrica.

Allora $f(v) \in W^\perp$ per ogni $v \in W^\perp$.

Dim] $W^\perp =$ tutti i vettori v t.c. $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$.

Ma allora sia $v \in W^\perp$ e sia $w \in W$. Allora

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $W^\perp \quad W$

Quindi $f(v)$ è $\perp$ a tutti gli elementi di W , quindi $f(v) \in W^\perp$.

— o — o —