

Dim. mult. geom. $\leq$ mult. algebrica

Sia α un autovalore di A . Poniamo $m_g(\alpha) = k$. Devo dimostrare che $p_A(\lambda)$ è divisibile almeno per $(\lambda - \alpha)^k$.

Poiché $m_g(\alpha) = k$, esistono k vettori lin. indip. $v_1, \dots, v_k$ che stanno nell'autospazio cioè tali che

$$Av_1 = \alpha v_1 \quad \dots \quad Av_k = \alpha v_k.$$

Completiamo ad una base aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$.

In questa nuova base, come diventa la matrice A ?

$$B = \begin{array}{c|ccc} & \overset{k}{\text{col}} & & & \\ \hline & \begin{matrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a \end{matrix} & * & \\ \hline & 0 & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_k \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_k \quad v_{k+1} \dots$

B è simile ad A , quindi hanno

$$p_B(\lambda) = p_A(\lambda)$$

$\uparrow$
calcolo

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \text{Id}) =$$

$$\begin{array}{c|ccc} a-\lambda & & & \\ \hline & a-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a-\lambda \\ \hline & & & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ * \\ \\ \end{array}$$

$$= (a-\lambda)(a-\lambda) \dots (a-\lambda) \cdot \text{roba}$$

$$= (a-\lambda)^k \cdot \text{roba}$$

$\uparrow$
quindi è divisibile per $(a-\lambda)$

— o — o —

Lemma Sia $f: V \rightarrow V$ lineare.

Siano $v_1, \dots, v_m$ autovettori di f corrispondenti ad autovalori distinti.

Allora $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip.

Dim. Supponiamo che non lo siano. Allora ci sono delle relazioni

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

senza che tutti i c_i siano nulli.

Tra tutte quelle possibili, prendiamone una più corta di tutte, e supponiamo (a meno di cambiare i numeri) che coinvolga i primi k vettori

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \quad \text{con } c_1, \dots, c_k \text{ tutti } \neq 0.$$

(in generale $k \leq m$). $\uparrow R_1$

Applico f a dx e sx

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) = f(0) = 0$$

"

$$c_1 f(v_1) + \dots + c_k f(v_k)$$

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k$$

Abbiamo scoperto che anche

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k = 0 \quad R_2$$

Cosa succede se scrivo $\lambda_1 R_1 - R_2$:

$$c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + c_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \dots + c_k (\lambda_1 - \lambda_k) v_k = 0$$

Tutti i coeff. sono $\neq 0$ perché i $c_i \neq 0$ e i λ_i sono tutti diversi.

Quindi avremmo ottenuto una relazione + corta.

— 0 — 0 —

Dim. Teo. di diagonalizzazione

Diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono reali
 $w_\lambda = w_\mu$ per ogni autovalore

$\Rightarrow$ Se A è diagonalizzabile, allora A è simile a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Allora il $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ da cui si vede che tutte le radici sono reali (sono proprio $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).
Le molteplicità coincidono perché se una radice compare k volte la sua molt. alg. è k e la dimensione di $\ker(D - \text{radice} I)$ è proprio k (quando sottraggo trovo k colonne di zeri).

$\Leftarrow$ Per ogni autovalore, prendiamo una base dell'autospazio.
Mettiamo insieme tutti i vettori ottenuti.

Detto meglio: siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti con molteplicità $m_1, \dots, m_k$

Allora $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (la somma delle molt. alg. è il grado del polinomio)

Ora prendo m_1 vettori che sono base autospazio di λ_1
(qui uso che le molt. coincidono)

m_2 vettori che sono base autosp. di λ_2
e così via.

Così facendo ho preso n vettori che vanno a finire in multipli di se stessi.

Se dimostro che sono una base ho finito.

Dim. che sono lin. indep.

Suppongo che non lo siano. Allora esiste una comb. lin. che fa 0 senza avere tutti i coeff. nulli

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

In questa somma raggruppo tutti i termini che corrispondono allo stesso autovalore.

Otengo $w_1 + \dots + w_k = 0$

$\uparrow$ autovettore di λ_1
 $\uparrow$ autovettore di λ_k

Questo non va bene, perché autovettori con autovalori distinti sono lin. indep.

L'unica possibilità è che $w_1 = w_2 = \dots = w_k = 0$, ma allora devono essere nulli tutti i c_i . Perché?

Ad esempio: w_1 è combinazione lineare degli el. della base dell'autospazio di λ_1 , e quindi tutti i coeff. del blocco di λ_1 devono essere nulli. E così per gli altri.

— 0 — 0 —

Esempio 1 Cosa vuol dire che 0 è autovalore di una matrice?

Vuol dire che esiste $v \neq 0$ t.c. $Av = 0$, quindi

$$\text{Ker}(A) \neq \{0\}$$

Quindi $\text{Ker}(A) = \text{autospazio di } 0$ e

$$\dim(\text{Ker}(A)) = \text{mult. geom. di } 0.$$

Esempio 2 $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ È diagonalizzabile?
Chi sono autovalori / autovettori?

Risposta: A è simile a $\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 21$ con $\text{ma}(21) = \text{mg}(21) = 1$
- $\lambda = 0$ con $\text{ma}(0) = \text{mg}(0) = 2$

Si vede che $\text{Rango}(A) = 1$, quindi $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$

$\Rightarrow$ quindi $\lambda = 0$ è autovalore con $\text{mg}(0) = 2$

La somma degli autovalori è la traccia quindi 21.

Ci sono 3 autovalori: di questi, almeno 2 sono 0 e la somma è 21, quindi sono 0, 0, 21.

A quel punto le molteplicità geometriche e algebriche sono determinate.

Come trovo M tale che $M^{-1}AM = \text{diagonale}$ $\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow \\ v_1 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ v_2 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ v_3 \end{matrix}$

v_2 e v_3 sono una qualunque base del ker, ad esempio
 $(1, -1, 0)$ $(1, 0, -1)$

v_1 è un qualunque vettore tale che $Av_1 = 21v_1$

Basta usare $(1, 1, 1)$.

Quindi

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: dalla nuova alla canonica, quindi è M .

[Calcolare inversa e fare verifica!]

— 0 — 0 —