

Back to lezione precedente Idea della dim. dei punti (3) e (5)

(3) Scriviamo $A - \lambda \text{Id}$

Come faccio ad ottenere λ^n
sviluppando il Det?

Devo prendere il prodotto dei termini
sulla diagonale, e quel prodotto
è del tipo

$$(-1) \lambda^n + \text{roba di grado più basso}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \text{numeri} \\ \text{numeri} & \begin{matrix} a_{22}-\lambda \\ \vdots \\ a_{nn}-\lambda \end{matrix} \end{pmatrix}$$

(5) Anche qui andrebbe fatta per involuzione sulla dimensione.

Domanda: come ottengo termini di grado λ^{n-1} sviluppando il
determinante?

Sviluppiamo rispetto alla prima riga:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \text{Det}(\text{prec.}) + \underbrace{\text{altri termini tutti di grado } \leq n-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} \cdot \text{Traccia}(\text{precedente}) \end{array} \right\} \text{perché ho cancellato esattamente} \\ \text{due termini con il } \lambda$$

Ci sono 2 tipi di termini di λ^{n-1} quando faccio il prodotto
 $-\lambda \cdot (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} \cdot \text{Traccia}(\text{prec.}) + (-1)^{n-1} a_{11} \lambda^{n-1}$

Mettendo insieme diventa $\lambda^{n-1} (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \text{Traccia}(\text{prec.}))}_{\text{Traccia completa}}$

— o — o —

PROBLEMA DELLA DIAGONALIZZAZIONE

Def. Siano A e B due matrici $n \times n$.

Si dice che B è **SIMILE** ad A se esiste una matrice M invertibile ($n \times n$) tale che

$$B = M^{-1} A M$$

Moralmente: B ed A rappresentano la stessa applicazione in due basi diverse, ed M è la matrice di cambio di base

Diagonalizzazione di applicazioni Data $f: V \rightarrow V$ lineare
↑ ↑
stesso spazio

trovare, se esiste, una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che in questa base la matrice di f sia diagonale.

Questo vuol dire che

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$\vdots$

$$f(v_n) = \lambda_n v_n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \circ & \\ & \circ & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizzazione di matrici Data A matrice $n \times n$, trovare M matrice invertibile $n \times n$ t.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{matrice diagonale}$$

In altre parole: trovare una matrice diagonale che sia simile ad A .

Diagonalizzare vuol dire: $\rightarrow$ nel primo caso trovare $v_1, \dots, v_n$

$\rightarrow$ nel secondo caso trovare M e D

- ① Posso sempre diagonalizzare? **MAGARI!**
- ② Che faccio se non posso diagonalizzare? **JORDAN**
- ③ Come stabilisco se posso diagonalizzare? **QUESTA LEZIONE**

Prop. Siano A e B due matrici simili.
Allora hanno lo stesso polinomio caratteristico

Dim Sappiamo che $B = M^{-1}AM$. Allora

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \text{Id}) = \det(M^{-1}AM - \lambda \text{Id})$$

$$= \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M)$$

$$= \det[M^{-1}(A - \lambda \text{Id})M]$$

$$\text{(BINET)} \quad = \frac{\det(M^{-1}) \det(A - \lambda \text{Id}) \cdot \det(M)}{\det(M)}$$

$$= \det(A - \lambda \text{Id}) = p_A(\lambda)$$

Oss. Avendo lo stesso pol. caratt., allora in particolare

$$\det(A) = \det(B) \quad (\text{segue anche da BINET})$$

$$\text{Traccia}(A) = \text{Traccia}(B) \quad (\text{a meno del segno è il coeff. di } \lambda^{n-1} \text{ nel pol. car.})$$

autovalori di A = autovalori di B

Def. Sia A una matrice $n \times n$.
Sia λ un autovalore di A .
Si definisce

- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** di λ la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$
- **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** la dimensione dell'autospazio di λ cioè
$$\dim(\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}) = \dim(\ker(A - \lambda Id))$$

Teorema 1 Per ogni autovalore λ vale che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Teorema 2 Sia A una matrice $n \times n$.

Allora A è diagonalizzabile se e solo se

- tutti gli autovalori di A sono reali (cioè tutte le n radici complesse del pol. caratteristico sono in realtà reali)
- per ogni autovalore succede che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Corollario (Condizione sufficiente, ma non necessaria)

Sia A una matrice $n \times n$.

Supponiamo che gli n autovalori di A siano reali e **DISTINTI**.

Allora A è diagonalizzabile.

Dim Abbiamo n autovalori distinti. Quindi le loro molteplicità sono per forza tutte 1 (la somma delle molteplicità deve fare n). Ma allora tutte le molt. geom. sono 1 e quindi coincidono con le algebriche.

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 29 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Questa matrice è diagonalizzabile

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)$ $\leadsto$ le radici sono 1, 2, 7
 $\uparrow$
triangolare superiore
reali e distinte $\Rightarrow$ diag.

Quindi A è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = D$

cioè esiste una matrice M tale che

$$A = M^{-1}DM \quad \text{oppure} \quad MAM^{-1} = D$$

Come trovo M? Risolvo $Ax = x$ $Ax = 2x$ $Ax = 7x$
Le soluzioni sono la base cercata

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Per quali valori di A è diagonalizzabile?

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Radici $\nearrow \lambda=1$ con $m_a=1$ e quindi anche $m_g=1$
 $\searrow \lambda=2$ con $m_a=2$

Quindi A è diagonalizzabile se e solo se m_g dell'autovalore 2 è 2,
Quindi se e solo se $\dim(\ker(A-2Id)) = 2$

$$A-2Id = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Questo accade} \Leftrightarrow a=0$$

— 0 — 0 —