

Lunga parentesi sui polinomi

Un polinomio si scrive nella forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

↑ ↑ ↑ ↑
coeff. del polinomio e sono
numeri (interi, razionali, reali, COMPLESSI)

Si intende che $a_n \neq 0$ e n si dice GRADO del polinomio.

Il polinomio si dice MONICO se $a_n = 1$.

Def. Un numero (reale o complesso) α si dice RADICE del polinomio se

$$p(\alpha) = 0$$

Teorema di Ruffini Se α è RADICE del polinomio $p(x)$, allora

$$p(x) = (x - \alpha) q(x)$$

↑
polinomio di grado $n-1$
se $p(x)$ ha grado n

TEOREMA MISTERIOSO (Teo. fondamentale dell'algebra)

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono interi o reali, ancora meglio) di grado ≥ 1 .

Allora $p(x)$ ammette almeno una radice COMPLESSA, cioè esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\alpha) = 0$.

Oss. Se anche i coeff. di $p(x)$ sono tutti reali o interi, la radice può comunque essere complessi.

(Pensare a $p(x) = x^2 + 1$)

Def. (Moltiplicità di una radice)

Sia α una radice di $p(x)$. Si dice **MOLTEPLICITÀ** di α il più grande intero m tale che $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$ ($m \geq 1$ per il teorema di Ruffini)

Oss. Se m è la molteplicità di α , allora

$$\begin{array}{ccc} p(x) = (x - \alpha)^m q(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{grado } n & & \text{polinomio di grado } n - m \\ & & \text{tale } q(\alpha) \neq 0 \end{array}$$

$\uparrow$
se fosse $q(\alpha) = 0$, allora per Ruffini avremmo $q(x) = (x - \alpha)r(x)$ e quindi avrei un altro fattore $(x - \alpha)$

Oss. (da corso di Analisi) Se α è radice di molteplicità m , allora

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

(si annullano le prime $m-1$ derivate di $p(x)$ in $x = \alpha$, ma non la m -esima).

Teorema importante (Conseguenza del teo. fondamentale)

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono reali, meglio) di grado $n \geq 1$.

Allora $p(x)$ ha esattamente n radici, pm di contarle con la loro molteplicità.

$\uparrow$
COMPLESSE

Dati Le radici sono $\leq n$

Prendiamo le prime n radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, contate con molteplicità. Allora per Ruffini iterato possiamo scrivere

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \cdot \text{numero} \uparrow \text{polinomio di grado 0}$$

Se sostituisco un qualunque altro α non può venire 0, perché è prodotto di termini non nulli.

Le radici sono n Per teo. fond. $p(x)$ ha almeno una radice α_1 , quindi per Ruffini

$$p(x) = (x - \alpha_1) q(x) \uparrow \text{grado } n-1$$

Se $n-1 \geq 2$, allora $q(x)$ ha una radice α_2 , quindi

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) r(x)$$

e così via fino a quando il grado non è esaurito
— 0 — 0 —

SOMMA E PRODOTTO DELLE RADICI

posso sempre assumere che lo sia dividendo

Sia $p(x)$ un polinomio MONICO a coeff. complessi.

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le sue radici complesse, contate con molteplicità. Scriviamo

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Allora

$$\alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n a_0$$

prod. radici

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -a_{n-1}$$

somma radici

Idea della dim. Sappiamo che

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot 1$$

↑
aumentiamo il coeff.
di x^n non forma

Immaginiamo di svolgere il prodotto:

→ il termine noto diventa $(-\alpha_1) \cdot (-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (-\alpha_n) = (-1)^n \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

→ i termini di grado $(n-1)$ si ottengono prendendo x in $n-1$ parentesi e $-\alpha_i$ nella restante. Quindi i termini di grado $n-1$ hanno come coeff. $-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$

(Dim. più formale si fa per induzione)
— o — o —

Esempi di grado basso

$$[n=2] \quad (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$[n=3] \quad (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

— o — o —

↑
SOMMA

↑
PRODOTTO

POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata). Il pol. caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ allora

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2$$

(tolgo λ sulla diagonale)

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12$$

Proprietà del polinomio caratteristico

(1) Le radici di $P_A(\lambda)$ sono gli autovalori di A

(2) Se A è diagonale o triangolare (inferiore o superiore) con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale, allora

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

(3) Il termine di grado più alto in $P_A(\lambda)$ è $(-1)^n \lambda^n$

(4) Il termine noto di $P_A(\lambda)$ è $\text{Det}(A)$

(5) Il coeff. di λ^{n-1} in $P_A(\lambda)$ è $(-1)^{n+1} \text{Traccia}(A)$

Def. La traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale

$$\text{Traccia}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

↑ *fizi sulla diagonale*

Dim. (1): visto alla lezione 35

(4): Basta sostituire $\lambda=0$

$$\text{termine noto} = P_A(0) = \text{Det}(A - 0 \cdot \text{Id}) = \text{Det}(A)$$

(2) Se A è triangolare superiore, anche $A - \lambda \text{Id}$ lo è come in figura, e il Det è il prodotto della roba sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & & \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & 0 & \lambda_3 - \lambda & \\ & & & \ddots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —