

Seconda Domanda (in termini di applicazioni)

stesso spazio

Sia $f: V \rightarrow V$ lineare, con V sp. vett.

Possiamo scegliere una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in modo che
USANDO LA STESSA BASE IN PARTENZA ED ARRIVO
la matrice sia bella/semplice?

Seconda domanda (in termini di matrici)

Sia $A \in M_{n \times n}$ (deunque quadrata). Voglio trovare $M \in M_{n \times n}$
invertibile tale che

$$M^{-1} A M$$

← stessa M

sia bella/semplice

Esempio motivazionale

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

→ Calcolare A^{2021}

→ Trovare B matrice 2×2 t.c. $B^{16} = A$.

In questo momento sembra impossibile in poco tempo.

Puntiamo ad ottenere matrici diagonali che sono comode.

Cosa vuol dire che una applicazione ha matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \vdots \\ \leftarrow v_n \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑

$f(v_1)$ $f(v_2)$... $f(v_n)$

Deve essere $f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n v_n$

Definizione (per le applic. lin.)

Sia V uno sp. vett. e sia $f: V \rightarrow V$ una applic. lineare

- Si dice che un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è **AUTOVALORE** per f se esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$
- Se λ è autovalore, tutti i $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$ si dicono **AUTOVETTORI** relativi a λ
- Si dice **autospatio** di λ l'insieme di tutti i vettori $v \in V$, compreso lo 0, tali che $f(v) = \lambda v$.

Oss. La precisazione $v \neq 0$ nella def. di autovalore è essenziale perché se potessi usare $v = 0$, allora ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sarebbe autovalore

Nota linguistica

AUTOVALORE = EIGENVALUE

" VETTORE = EIGENVECTOR

" SPAZI = EIGENSPACE

Def. (per le matrici). Se

$$Av = \lambda v \quad \text{e} \quad v \neq 0$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
autovalore autovettore

Prop. Se λ è un autovalore di f , allora il corrispondente autospatio è un s.sp. vett. di V

Dim. Se $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda (v_1 + v_2)$$

quindi $v_1 + v_2 \in$ autospatio di λ .

Se $f(v) = \lambda v$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $f(av) = af(v) = a\lambda v = \lambda(av)$, quindi $av \in$ autospatio di λ .

Come trovo gli autovalori di una applicazione o matrice?

Prop. Sia A una matrice $n \times n$. Allora

λ è autovalore di A se e solo se $\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0$

Dim λ autovalore di $A \Leftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ t.c. } Av - \lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 \text{ t.c. } (A - \lambda \text{Id})v = 0$$

$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \text{ (contiene } v \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0.$$

Esempio Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Calcoliamo autovalori, autovettori, autospazi

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{tolgo } \lambda \text{ agli el. sulla diagonale})$$

$$\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = (2-\lambda)(6-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione sono $\lambda = 3$ e $\lambda = 5 \leftarrow$ autovalori

Calcolo autovettori / autospazi

$\lambda = 3$ Cerco i vettori che vanno in 3 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x + y = 3x \\ -3x + 6y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{5. inutile}$$

Il sistema ha infinite soluzioni (doveva succedere). Le soluzioni sono

$\text{Span}((1, 1))$ $t(1, 1) \leftarrow$ per $t \neq 0$ sono tutti autovettori
 $\uparrow$ Autospazio

$\lambda = 5$ Cerco i vettori che vanno in 5 volte se stessi. Come prima

$$\begin{cases} 2x + y = 5x \\ -3x + 6y = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \leftarrow \text{INUTILE}$$

$$\text{Autospazio} = \text{Span}((1, 3))$$

Conclusione: gli autovalori sono

$$\lambda = 3 \quad \text{con autospazio } \text{span}((1, 1))$$

$$\lambda = 5 \quad \text{con autospazio } \text{span}((1, 3))$$

— 0 — 0 —

Nell'esempio di prima consideriamo la base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$v_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1, 3)$$

In questa base la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\varphi(v_1) \quad \varphi(v_2)$

In termini di cambio di base, consideriamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

Verifica: $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} A M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\searrow \quad \swarrow$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ora
$$\begin{aligned} D \cdot D &= (M^{-1} A M) (M^{-1} A M) \\ &= M^{-1} A \cancel{M} \cancel{M^{-1}} A M \\ &= M^{-1} A^2 M \end{aligned}$$

$$D \cdot D \cdot D = M^{-1} A \cancel{M} \cdot \cancel{M^{-1}} A \cancel{M} \cdot \cancel{M^{-1}} A M = M^{-1} A^3 M$$

e analogamente

$$D^{2021} = M^{-1} A^{2021} M$$

da cui (devo moltip. a sx per M e a dx per M^{-1})

$$\begin{aligned} A^{2021} &= M D^{2021} M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{2021} & 0 \\ 0 & 5^{2021} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e in questo modo ho calcolato A^{2021}

Questa procedura si chiama **DIAGONALIZZARE A**, cioè trovare M e D tali che

$$M^{-1} A M = D.$$

↑ nelle colonne ci sono gli autovettori
↑ sulla diagonale ci sono gli autovalori

Oss. Quando so che λ è autovalore di A, per trovare gli autovettori e l'autospazio basta calcolare il

$$\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$$

invece che impostare $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$.

— o — o —