

FORME CANONICHE

Primo caso

Domanda (in termini di applicazioni). Sia data $f: V \rightarrow W$ lineare, con V e W spazi vettoriali.

Scegliendo bene una base di V e una base di W , posso rendere la matrice associata ad f particolarmente bella / semplice?

Domanda (in termini di matrici) Sia data A matrice $n \times m$.

Posso trovare una matrice $M \in M_{m \times m}$ e $N \in M_{n \times n}$ invertibili tali che

$$N^{-1} A M$$

(le dimensioni permettono di calcolare il prodotto)

sia particolarmente bella / semplice.

Perché sono collegate? Supponiamo che

- V ha dimensione m e sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base
- W ha dimensione n e sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base
- sia $A \in M_{n \times m}$ la matrice associata ad f con queste basi.

Se ora considero

- una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ di V
- " " " $\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n\}$ di W

come diventa la matrice tra queste nuove basi?

Basta considerare le matrici di cambio di base. Siano

- M la matrice che cambia base in V dalla nuova alla vecchia
(le colonne di M sono le componenti di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$ risp. ai $v_1, \dots, v_m$)
- N la matrice che cambia base in W dalla nuova alla vecchia
(le colonne di N sono le componenti di $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n$ risp. ai $w_1, \dots, w_n$)

Allora la nuova matrice $\hat{A}$ sarà

$$\hat{A} = N^{-1} A M$$

↑ prende comp. di v rispetto a $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$
e restituisce comp. di v risp. a $v_1, \dots, v_m$
↑ prende comp. di v risp. a $v_1, \dots, v_m$
e restituisce comp. di $f(v)$ risp. a $w_1, \dots, w_m$
↑ prende comp. di $f(v)$ risp. alla $w_1, \dots, w_m$
e restituisce comp. di $f(v)$ risp. alla $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m$

Teorema (Per le applic. lineari)

Supponiamo $f: V \rightarrow W$ lineare, e sia $r = \dim(\text{Im}(f))$.

Allora scegliendo bene le basi la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & r & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(un blocco $r \times r$ con l'identità
ed il resto tutti 0)

Teorema (Per le matrici)

Supponiamo $A \in M_{m \times m}$, e sia $r = \text{rank}(A)$.

Allora esistono matrici invertibili $M \in M_{m \times m}$ ed $N \in M_{m \times m}$ t.c.

$$N^{-1} A M = \text{matrice come quella di sopra.}$$

Conclusione: tutto dipende solo dal rango.

Più in generale: date due matrici $m \times m$ con lo stesso rango r , possiamo dire che queste rappresentano la stessa applicazione, solo scritta in due basi diverse.

Domanda operativa? Come trovo le 2 basi speciali, o equivalentemente come trovo M ed N ?

Risposta: ripercorrendo la dimostrazione del rank-nullity

$$\dim_{\underset{\text{"}k\text{"}}{\text{Ker}}}(\varphi) + \dim_{\underset{\text{"}r\text{"}}{\text{Im}}}(\varphi) = \dim_{\underset{\text{"}m\text{"}}{V}}$$

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\text{Ker}(\varphi)$

Completiamola ad una base di V aggiungendo $\{v'_1, \dots, v'_r\}$.

In questo modo $\{v'_1, \dots, v'_r, v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V .

Consideriamo

$$w_1 = \varphi(v'_1) \quad \dots \quad w_r = \varphi(v'_r)$$

e completiamola in qualche modo fino ad avere una base di W .

Come è fatta la matrice usando queste basi?

È proprio la matrice che volevo.

$$\begin{array}{l} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_r \rightarrow \\ w_{r+1} \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\varphi(v'_1) \quad \varphi(v'_r) \quad \varphi(v_1) \quad \dots \quad \varphi(v_k)$

— 0 — 0 —

Algoritmo per trovare le basi

- In partenza (V) gli ultimi k sono una base del Ker e i primi r sono qualunque cosa che la completa
- In arrivo (W) i primi r sono φ dei primi r el. della base di V ed il resto è qualunque cosa che la completa.

— 0 — 0 —

Esempio Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ha chiaramente rango 2. Trovare M ed N t.c.

$$N^{-1} A M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cerco in partenza ($\mathbb{R}^4$) una base del ker, che ha dimensione 2.

Volevo posso risolvere il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

In questo caso si vede a occhio che una base è

$$v_3 = (1, 0, -1, 0)$$

$$v_4 = (0, 1, 0, -1)$$

(è come fare $C_1 - C_3$)

(è come fare $C_2 - C_4$)

Completiamo la base del ker aggiungendo due vettori opportuni, ad esempio

$$v_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, 0, 1, 0)$$

Per controllare che siano una base, basta fare il Det

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← Matrice con $\text{Det} \neq 0$

Quindi la matrice M è la matrice che li ha come colonne

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Passiamo in arrivo. Allora

$$w_1 = f(v_1) = (4, 1, 4)$$

$$w_2 = f(v_2) = (1, 4, 1)$$

e la posso completare aggiungendo ad esempio $(1, 0, 0)$.

Conclusione: la matrice N è quella che li ha come colonne, cioè

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica da fare

$$N^{-1} A M = \text{matrice semplice richiesta}$$

— 0 — 0 —