

MATRICI ORTOGONALI

Prop. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata).

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(i) le righe di A sono una base ORTONORMALE

(ii) le colonne di A sono una " "

(iii) $A^{-1} = A^t$, cioè $A \cdot A^t = A^t \cdot A = Id$

Def. La matrice A si dice ortogonale se verifica una qualunque delle proprietà precedenti, e quindi le verifica tutte.

Dim. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ Sia $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{varie righe}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \overline{R_1} \\ \overline{R_2} \\ \vdots \\ \overline{R_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \end{pmatrix}$$

Quando calcolo il prodotto righe per colonne, quelle che trovo al posto i, j è proprio

$$\langle R_i, R_j \rangle$$

e quindi viene la matrice identica se e solo se le righe sono ortonormali

$$(ii) \Leftrightarrow (iii) \quad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \overline{C_1} \\ \overline{C_2} \\ \vdots \\ \overline{C_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{pmatrix}$$

Vista così in posizione i, j troviamo $\langle C_i, C_j \rangle$

e quindi viene la matrice identica se e solo se le colonne sono ortonormali.

Proprietà classiche delle matrici ortogonali

(1) Se A è ortogonale, allora $\det(A) = \pm 1$, quindi in particolare è $\neq 0$ e A è invertibile

Se $A \cdot A^t = \text{Id}$, allora per BINET

$$\det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(\text{Id}) = 1$$

$\overset{\text{"}}{\det(A)}$

$$\leadsto [\det(A)]^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \det(A) = \pm 1$$

(2) Se A e B sono ortogonali della stessa dim., allora $A \cdot B$ è ancora ortogonale

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
prop. inversa ortog. prop. trasposta

Quindi $(AB)^{-1} = (AB)^t$, cioè AB è ortogonale

(3) Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali

Infatti coincidono, e poi le righe di A diventano le colonne di A^t .

Achtung! Se A e B sono ortogonali, allora $A+B$ non è detto che sia ortogonale.

Bisogna fare un esempio!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sono ortogonali, ma la loro somma non lo è.}$$

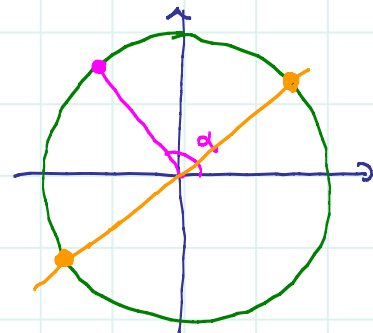
Esercizio

Come sono fatte TUTTE le matrici 2×2 ortogonali

Sappiamo, per esempio, che le righe devono essere ortonormali.

Quindi la prima riga deve essere un vettore di norma 1, quindi che sta sulla circonferenza trigonometrica, cioè del tipo

$$\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad \leftarrow \text{prima riga}$$



La seconda riga deve essere ancora di norma 1 e perpendicolare alla prima riga.

Ci sono quindi solo 2 possibilità,

corrispondenti a angoli $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$

Calcolando sin e cos di questi due angoli troviamo le due possibili matrici

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \\ \text{Det} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \\ \text{Det} = -1$$

Esempio Costruire una matrice 3×3 ortogonale

Partiamo da una base qualunque di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_2 = (2, 1, 3)$$

$$v_3 = (0, 1, 0)$$

[Verifica!]

Trasformiamola in una base ORTOGONALE con GS almeno all'inizio

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= (2, 1, 3) - \frac{\langle (2, 1, 3), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} (1, 0, 1) = (2, 1, 3) - \frac{5}{2} (1, 0, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Togliamo le frasi e prendiamo $w_2 = (-1, 2, 1)$

Produciamo w_3 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = (-2, -2, 2)$$

Togliendo i due otteniamo la base

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = (-1, 2, 1)$$

$$w_3 = (1, 1, -1)$$

Se li dividiamo per la norma diventano una base ortonormale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{matrice ORTOGONALE } 3 \times 3$$

(la sua inversa è la trasposta:
provarne per credere!)

Oss. Se voglio fare l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

basta osservare che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se moltiplico la 1ª riga per $\frac{1}{3}$, la seconda per $\frac{1}{5}$, e la terza per $\frac{1}{3}$ il prodotto viene l'identità. Quindi l'inversa è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$V = \{ (x, y, z, w) : x+y-z=0, y+z+w=0 \}$$

Scrivere la proiezione ortogonale su V del vettore $(1, 1, 1, 1)$

① Mi procuro una base di V

$$v_1 = (2, -1, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, -1, 0, 1)$$

② Ortogonalizzo con GS

$$w_1 = (2, -1, 1, 0)$$

$$w_2 = (1, -1, 0, 1) - \frac{3}{6} (2, -1, 1, 0)$$

$$= (1, -1, 0, 1) - \frac{1}{2} (2, -1, 1, 0) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

o ancora meglio $(0, 1, 1, -2)$

Verifica

③ Scrivo $(1, 1, 1, 1) = \underbrace{c_1 w_1 + c_2 w_2}_{\text{proiezione su } V} + c_3 w_3 + c_4 w_4$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{perp. ai prec.}$

④ Basta calcolare $c_1 = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$ $c_2 = \frac{\langle u, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$
— 0 — 0 —