

→ ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

→ PROIEZIONE ORTOGONALE

Def. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.
Si dice ortogonale di V l'insieme

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

↑
vettori che sono $\perp$ a tutti
i vettori di V

Prop. $V^\perp$ è un s.sp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dim Se $\langle w_1, v \rangle = 0$ e $\langle w_2, v \rangle = 0$, allora $\langle w_1 + w_2, v \rangle = 0$

Analogamente

se $\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$, allora $\langle aw, v \rangle = a \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$
e quindi anche $aw \in V^\perp$

Teorema Sia V un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

somma diretta
ortogonale, cioè tutti i vettori del
primo s.sp. sono $\perp$ a tutti i vettori del secondo

Dim. Ci sono 2 cose da dimostrare

Primo: $V \cap V^\perp = \{0\}$ Supponiamo che $v \in V$ e $v \in V^\perp$. Ma allora

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad (\text{deve essere ortogonale a se stesso})$$

il che può accadere solo se $v = 0$.

$$\boxed{\text{Secondo: } V + V^\perp = \mathbb{R}^n}$$

Detto altrimenti, devo dimostrare che ogni $u \in \mathbb{R}^n$ si scrive come

$$u = v + w$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\in V \quad \in V^\perp$

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di V . Completiamola ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Applicando GS troviamo una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$.

Ora sappiamo che

$$\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$$

Ogni $u \in \mathbb{R}^n$ lo possiamo scrivere come

$$u = \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_k w_k}_{\in V} + \underbrace{c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n}_{\substack{\text{ci piacerebbe che questo} \\ \text{stesse in } V^\perp}}$$

Poiché i w_i sono una base ortogonale, allora il prodotto scalare tra

$$c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n$$

con una qualunque comb. lin. di $w_1, \dots, w_k$ fa sempre 0, perché in tutti i termini compare qualcosa del tipo

$$\langle w_i, w_j \rangle$$

$\nwarrow \quad \quad \nearrow$
 primi $k \quad \quad$ da $k+1$ in poi
 — 0 — 0 —

FATTO GENERALE Dato V s.sp. di $\mathbb{R}^n$, è univocamente determinato un s.sp. W t.c.

$$\mathbb{R}^n = V \oplus W$$

$$e \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \text{ e } \forall w \in W \quad (\text{ovviamente } W = V^\perp).$$

Def. Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ s.sp. vettoriale, e dato $u \in \mathbb{R}^n$, si dice proiezione ortogonale di u su V la componente di u rispetto alla somma diretta

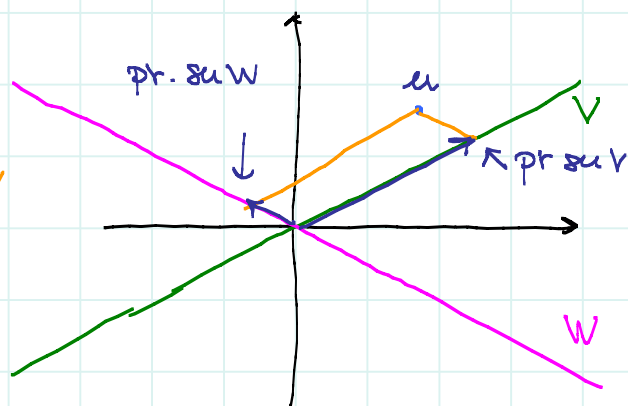
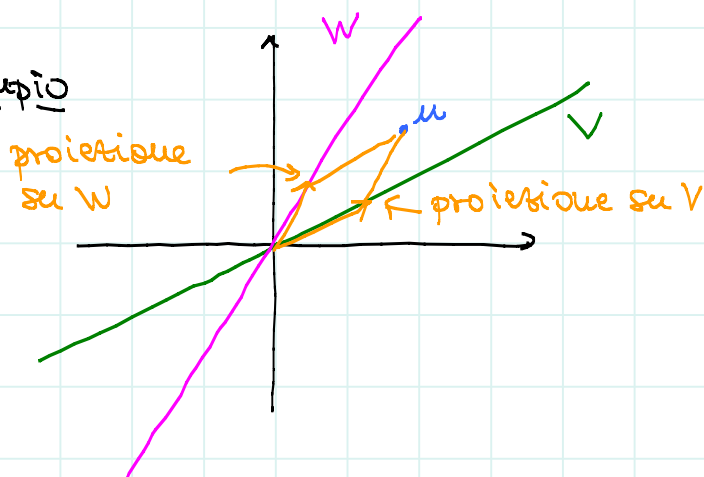
$$V \oplus V^\perp$$

— o — o —

Oss. Se non preciso "ortogonale", non ha senso chiedere la proiezione di u su un certo s.sp. V .

Ha senso solo se preciso una somma diretta $V \oplus W$

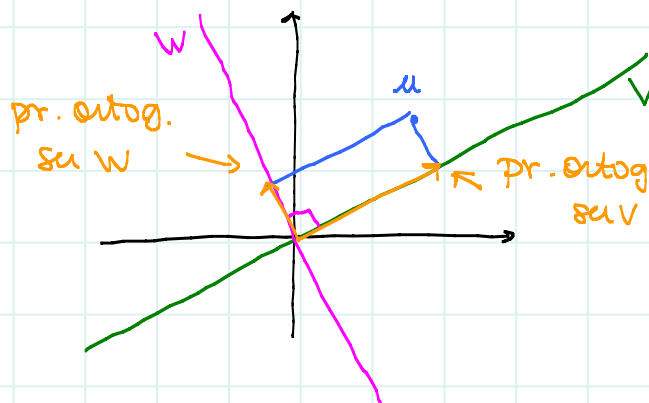
Esempio



Se lascio lo stesso V , ma cambio W , la proiezione cambia!

Quando preciso proiezione

ortogonale allora W si intende che è $V^\perp$



Come si calcolano le proiezioni (ortogonali o no)

Scrivo una base $u_1, \dots, u_k$ di V e una base $w_{k+1}, \dots, w_m$ di W

A questo punto ogni vettore u si scrive come

$$u = \underbrace{c_1 u_1 + \dots + c_k u_k}_{\in V} + \underbrace{c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_m w_m}_{\in W}$$

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$$

Calcolare la proiezione ortogonale su V del vettore $(1, 1, 1)$

① Mi procuro una base di V , ad esempio risolvendo il "sistema"

$$v_1 = (-2, 1, 0)$$

$$v_2 = (3, 0, 1)$$

② Rendiamola ortogonale

$$w_1 = (-2, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (3, 0, 1) - \frac{-6}{5} (-2, 1, 0)$$

$$= (3, 0, 1) + \frac{6}{5} (-2, 1, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right)$$

Volendo posso anche togliere le frazioni usando

$$w_1 = (-2, 1, 0)$$

e

$$w_2 = (3, 6, 5)$$

[Verifica: sono ortogonali e stanno nel piano].

③ La completo ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Ci sono vari metodi

3.1 $\rightarrow$ La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio aggiungendo

$(1, 0, 0)$ (verifica che sono una base) e poi applico GS

3.2 $\rightarrow$ Uso la formula ex-misteriosa a partire da w_1 e w_2

3.3 $\rightarrow$ uso il vettore dei coeff. del piano, cioè $(1, 2, -3) = w_3$

④ Scriviamo $(1, 1, 1) = \boxed{c_1 w_1 + c_2 w_2} + c_3 w_3$

$\uparrow$ proiezione ortogonale su V

Per calcolare c_1 e c_2 uso la formula per le basi ortogonali

$$c_1 = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-1}{5}$$

$$c_2 = \frac{\langle u, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$$

Quindi la proiezione su V è

$$-\frac{1}{5}(-2, 1, 0) + \frac{1}{5}(3, 6, 5) = (1, 1, 1)$$

BRAVO FURBO! Ho riscoperto che il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene a V ,
quindi chiaramente è la proiezione di se stesso.

Lo stesso procedimento funzionava partendo da un qualunque u .

Domanda finale: ottenuta la proiezione risp. a V (ortogonale), come
ottego quella rispetto a $V^\perp$?

1° modo: stesso procedimento usando le componenti rispetto ai
vettori della base che stanno in $V^\perp$

2° modo: faccio la differenza (la somma delle 2 proiezioni
deve fare u).

— o — o —