

- Basi ORTOGONALI
- Basi ORTONORMALI
- Algoritmo di GRAM-SCHMIDT

Def. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- ORTOGONALE se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i \neq j$
- ORTONORMALE se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad \leftarrow \text{sono ortogonali}$$

La seconda richiesta è equivalente a chiedere che $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Esempio banale La base canonica è ortonormale.

Prop. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ dei vettori in $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali, cioè

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j.$$

Allora per forza sono una base (se sono anche non nulli).

Dim. Essendo n , basta far vedere che sono lin. indep.

Supponiamo che $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$.

Faccendo il prod. scalare con un certo v_i troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + c_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &= c_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} \quad \rightsquigarrow \text{per forza } c_i = 0 \text{ e questo vale per ogni } i \end{aligned}$$

↑
si salva solo un termine

— 0 — 0 —

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_m\}$ siano una base ORTOGONALE di $\mathbb{R}^n$.
Come calcolo le componenti di un certo $v \in \mathbb{R}^n$ rispetto a questa base?

Metodo banale Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$ e risolvo il sistema lineare per trovare $c_1, \dots, c_m$

Sfrutto l'ortogonalità Suppongo di sapere che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

e faccio il prod. scalare con v_i . Otteengo

$$\begin{aligned}\langle v, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_m v_m, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_m \langle v_m, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle\end{aligned}$$

↑ si salva solo un termine

Ma allora

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Invece di risolvere un sistema lineare, calcolo 2 prodotti scalari

Se so in aggiunta che la base è **ortonormale** allora

$$c_i = \langle v, v_i \rangle$$

FATTO IMPORTANTE

Le comp. di un vettore rispetto ad una base ortonormale si calcolano facendo un prodotto scalare.

Se la base è solo ortogonale, allora ne servono due.

— o — o —

Come ottengo basi ortogonali / ortonormali?

Terzo passo Poniamo

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

NB: w_3 è comb.

Lin. di v_3, v_2, v_1

Perché funziona? Prendiamo $w_3 = v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2$ e cerchiamo α e β in modo che sia ortogonale ai 2 precedenti.

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_1 \rangle &= \langle v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + \alpha \langle w_1, w_1 \rangle + \beta \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} \end{aligned}$$

$$\leadsto \alpha = - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

Allo stesso modo troviamo β .

Passo k Otteniamo qualcosa del tipo

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Esempio 1 Applichiamo in $\mathbb{R}^2$ partendo da

$$v_1 = (1, 5) \quad v_2 = (1, 1)$$

$$w_1 = v_1 = (1, 5)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, 1) - \frac{6}{26} (1, 5)$$

$$= (1, 1) - \left(\frac{3}{13}, \frac{15}{13} \right) = \left(\frac{10}{13}, -\frac{2}{13} \right)$$

w_1, w_2 sono base ORTOGONALE (verifica: $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$)

Esempio 2 Applicare in $\mathbb{R}^3$ partendo da

$$U_1 = (1, 0, 1)$$

$$U_2 = (1, 2, 3)$$

$$U_3 = (0, -1, 2)$$

[Verificare che siano una base]

$$W_1 = (1, 0, 1)$$

$$W_2 = U_2 - \frac{\langle U_2, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} W_1$$

$$= (1, 2, 3) - \frac{4}{2} (1, 0, 1) = (1, 2, 3) - 2(1, 0, 1) = (-1, 2, 1)$$

$$W_3 = U_3 - \frac{\langle U_3, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} W_1 - \frac{\langle U_3, W_2 \rangle}{\langle W_2, W_2 \rangle} W_2$$

$$= (0, -1, 2) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) - \frac{0}{6} (-1, 2, 1)$$

$$= (0, -1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$$

Verifica: W_1, W_2, W_3 sono una base ORTOGONALE

Come li trasformo in una base ORTONORMALE?

Basta dividere per la norma. Cioè

se $U_1, \dots, U_m$ sono una base ORTOGONALE, allora

$\frac{U_1}{\|U_1\|}, \dots, \frac{U_m}{\|U_m\|}$ sono una base ORTONORMALE

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\hat{W}_1} \quad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{\hat{W}_2} \quad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\hat{W}_3}$$

Chi è la componente di $(1, 5, 0)$ rispetto a $\hat{W}_2$?

$$\text{È il prodotto scalare, cioè } \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{6}}}_{= 0} = \frac{9}{\sqrt{6}} \quad \text{?}$$