

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Consideriamo l'applicazione

$$p(x) \rightarrow p(2x) + p(3)x$$

Verifica tranquilla che l'applicazione è lineare.

1 - Determinare $\ker$ e Im

2 - Scrive matrice associata usando in partenza ed arrivo la base $\{x-1, x^2+2, x^2-x\}$

Scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$. Allora

$$p(2x) = a + 2bx + 4cx^2$$

$$p(3) = (a + 3b + 9c)$$

$$\begin{aligned} p(2x) + p(3)x &= \underbrace{a + 2bx + 4cx^2}_{p(2x)} + \underbrace{(a + 3b + 9c)x}_{p(3)x} \\ &= a + (a + 5b + 9c)x + 4cx^2 \end{aligned}$$

È come se avessi detto che

$$f(a, b, c) = (a, a + 5b + 9c, 4c)$$

con $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{questa è la matrice che prende in INPUT } (a, b, c) \text{ e restituisce } (a, a + 5b + 9c, 4c)$$

Se $\det A \neq 0$, allora l'immagine è tutto lo spazio di arrivo, cioè $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, quindi ha dim 3, quindi $\ker$ è solo il polinomio nullo $\det = 20$, quindi $\neq 0$.

Se volessi calcolare dove finisce x^2-6 , come posso fare?

→ Usando la matrice, calcolo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 4x^2 + 3x - 6$$

→ Usando la formula data $p(2x) + p(3)x$ con $p(x) = x^2 - 6$

$$4x^2 - 6 + 3x = 4x^2 + 3x - 6 \quad \text{☺}$$

Seconda domanda: $\underset{\text{"}u_1\text{"}}{x-1}, \underset{\text{"}u_2\text{"}}{x^2+2}, \underset{\text{"}u_3\text{"}}{x^2-x}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?

All'autica: $a(x-1) + b(x^2+2) + c(x^2-x) = 0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow a=b=c=0$

Moderno

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det = $2+1=3 \neq 0$, quindi sono una base

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow e_1 \\ \rightarrow e_2 \\ \rightarrow e_3 \end{matrix} \text{ rappresenta l'applic. dalla } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ alla } \{e_1, e_2, e_3\}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix}$

Cambio di base dalla $\{u_1, u_2, u_3\}$ alla $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix} = M$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$

La matrice richiesta è

$$M^{-1} A M$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{can.} \rightsquigarrow \text{strang} & \text{can.} \rightsquigarrow \text{can.} & \text{strang} \rightsquigarrow \text{canonica} \end{matrix}$

Esercizio 2 Consideriamo il sottospazio

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0 \}$$

e il sottospazio

$$W = \text{Span}(1, 6, 1)$$

- ① Trovare una base di V
- ② Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$
- ③ Scrivere le matrici che (usando la canonica in part. ed arrivo) rappresentano le proiezioni su V e W .

- ① Devo risolvere $x - y + 3z = 0$ Volendo ho y e z come param. Liberi
Volendo vedo anche a occhio che una base è
- $(1, 1, 0)$ $(-3, 0, 1)$
- (sono due, sono soluti., sono lin. indep.)

La prima settimana avevamo scritto

$$z=t, \quad y=5, \quad x=y-3z=5-3t$$

$$(x, y, z) = (s - 3t, s, t) = s(1, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$$

- ② Basta osservare che $V+W = \mathbb{R}^3$, cioè che
 $(1, 1, 0) \quad (-3, 0, 1) \quad (1, 6, 1) \leftarrow$ generatori di $V+W$
 sono una base di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \text{Det} \neq 0$$

Grassmann

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(V \cap W) & + & \dim(V + W) & = & \dim V & + & \dim W \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

per forza è $\{0\}$, quindi la somma è diretta

③ Se $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$, vuol dire che ogni vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{v}}_V + \underbrace{\vec{w}}_W$$

$$\vec{v} = \text{pr}_V \vec{u}$$

$$\vec{w} = \text{pr}_W \vec{u}$$

Facile: scrivere le due matrici usando la base

$$(1, 1, 0)$$

v_1

$$(-3, 0, 1)$$

v_2

$$(1, 6, 1)$$

w

Scriviamo pr_V . Ahhahah

$$\text{pr}_V(v_1) = v_1$$

$$\text{pr}_V(v_2) = v_2$$

$$\text{pr}_V(w) = 0$$

$$P_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{pr}_V(v_1) & \text{pr}_V(v_2) & \text{pr}_V(v_3) \end{matrix}$

pr_V dalla
strada alla
strada

Analogamente

$$\text{pr}_W(v_1) = 0$$

$$\text{pr}_W(v_2) = 0$$

$$\text{pr}_W(w) = w$$

$$P_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pr_W dalla strada
alla strada

Chi è $\ker(P_V)$? È W Chi è $\text{Im}(P_V)$? V

Come trovo le matrici dalla canonica alla canonica?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M \rightsquigarrow \text{cambio base dalla } \{v_3, v_2, w\} \text{ alla canonica}$$

$$\boxed{M P_V M^{-1}}$$

proiezione su V dalla
canonica alla
canonica

IDEM per pr_W .

— o — o —