

Esercizio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & a & 7 & -1 \\ 5 & 0 & b & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare il rango al variare dei parametri a e b .

La sottomatrice 2×2 evidenziata ha $\text{Det} = 7 \neq 0 \leadsto \text{rango} \geq 2$ sempre

Consideriamo sottomatrice 3×3 che contenga solo a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & a & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 4a - 10 - 10a - 24 = -6a - 34$$

Se $a \neq -\frac{17}{3}$, allora di sicuro $\text{rango} = 3$.

Stessa cosa con b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & b & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 28 + 6b - 70 + b = 7b - 42$$

Se $b \neq 6$, allora di sicuro $\text{rango} = 3$.

L'unico caso in cui può essere $\text{Rango} = 2$ è se

$$a = -\frac{17}{3} \text{ e } b = 6$$

In questo caso il rango è davvero 2.

Burocraticamente dovrei controllare i 4×4 $\text{Det } 3 \times 3$. In realtà bastano i due che abbiamo già fatto.

Infatti

→ La 1^a e 4^a colonna sono lin. indep.

→ La 2^a colonna è comb. lin. di 1^a e 4^a (Primo $\text{Det} = 0$ se $a = -\frac{17}{3}$)

→ La 3^a colonna " " " " " (secondo $\text{Det} = 0$ se $b = 6$)

Quindi $\text{Span}(\text{colonne}) = \text{Span}(1^a \text{ e } 4^a \text{ colonna})$

Esercizio 2 Dimostrare che esiste unica appl. lin. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad w_1 \quad v_2 \quad w_2$

Basta controllare che $\{v_1, v_2\}$ siano una base di $\mathbb{R}^2$. A quel punto il teo. di struttura assicura esistenza e unicità.

Controllo che siano base.

All'antica Impongo $av_1 + bv_2 = 0$ e spero di ottenere $a=b=0$.

Alla moderna $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\text{Det} = -13 \neq 0 \Rightarrow$ sono una base

Scrivere matrice associata ad f usando in partenza ed arrivo la base canonica

1° modo: uso la definizione Devo calcolare $f(1,0)$ e $f(0,1)$
Quelli che otterrò di uso come colonne.

Come calcolo $f(1,0)$?

Scrivo $(1,0) = a \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2$

Trova a e b e poi calcolo $f(1,0) = aw_1 + bw_2 = 1^a \text{ colonna}$
Stessa cosa per $f(0,1)$

2° modo: bonino La matrice sarà $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Impongo le condizioni del testo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $w_1 \quad w_2$

$$\begin{cases} -a + 3b = 1 \\ -c + 3d = 2 \\ 2a + 7b = 1 \\ 2c + 7d = 3 \end{cases} \leadsto \text{trovo } a, b, c, d.$$

3° modo: con i cambi di base Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} f(v_1) \\ f(v_2) \end{matrix}$$

Questa matrice rappresenta f dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

(verifica tra di voi: se do in input $(1,0)$ $\leadsto$ comp. di v_1 risp. $\{v_1, v_2\}$ ottengo in output $(1,2)$ $\leadsto$ comp. di $f(v_1)$ risp. $\{e_1, e_2\}$)

Mi serve il cambio di base dalla $\{e_1, e_2\}$ alla $\{v_1, v_2\}$. Osservo che

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ è la matrice che fa il cambio da } \{v_1, v_2\} \text{ a } \{e_1, e_2\}.$$

Quindi mi serve la sua inversa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Alla fine la matrice richiesta è

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Basta fare il prodotto

$\uparrow$ Prende componenti di un vettore rispetto alla canonica e restituisce comp. rispetto alla $\{v_1, v_2\}$

$\uparrow$ prende le comp. di v risp. alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce le componenti di $f(v)$ risp. alla $\{e_1, e_2\}$

4° metodo: metodo RAPUANO

$$f(-1, 3) = (1, 2)$$

$$f(2, 7) = (1, 3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Lavoro alla Gauss fino ad avere I_d a sx

Ciò che ritrovo a dx è la trasposta di quello che è richiesto !!

Perché funziona? Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ragionando come nel 3° modo sappiamo che la risposta è

$$A \cdot M^{-1}$$

La matrice di Rapuano è $(M^t | A^t)$. Quando lavoriamo alla Gauss otteniamo $(RM^t | RA^t)$

Se a sx c'è l'identità, allora $R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$.

Ma allora a dx c'è

$$RA^t = (M^{-1})^t A^t = (AM^{-1})^t = \text{trasposta di quella che serviva.}$$

Esercizio 3 Consideriamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di a si ha

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

Comunque lo si veda, si tratta di imporre $\text{Det} \neq 0$

(se $\text{Det} \neq 0$, allora le colonne sono lin. indip., d'altra parte

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(\text{colonne})$$

$$\text{Det} = 9a + 84 + 96 - 21a - 72 - 48 \neq 0.$$

Cosa succede quando $\text{Det} = 0$. Cosa possiamo dire di Ker e Im ?

In questo caso

→ $\text{Im}(f)$ ha dimensione 2 (la 1ª e 3ª colonna sono lin. indip.)

Volendo 1ª e 3ª colonna sono una base dell'immagine, ma lo sono anche 1ª e 2ª

Nota bene: anche la 1ª e 2ª colonna sono sempre lin. indip., qualunque sia il valore di a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} \neq 0$ sempre

→ $\text{Ker}(f)$ ha dimensione 1.

Come trovo una base di $\text{Ker}(f)$?

Risolve $Ax = 0$, dove A è la matrice 3×3 data.

$$\begin{array}{ccc} _ & 0 & _ & 0 & _ \end{array}$$