

Rango e sistemi lineari

Consideriamo un generico sistema lineare (n equazioni, m incognite)

$$A x = b$$

Diagram illustrating the components of the linear system $Ax = b$:

- A : matrice $n \times m$
- x : vettore delle m incognite
- b : vettore degli n termini noti

Chiamiamo

- A la matrice dei coeff. (matrice INCOMPLETA)
- $A' = (A|b)$ la matrice COMPLETA.

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

- ① Un sistema lineare ammette almeno una soluzione se e solo se

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$$

- ② In tal caso le soluzioni dipendono da un numero di parametri uguale a

$$m - \text{Rango comune di } A \text{ e } A'$$

- ③ In particolare la soluzione è unica se e solo se

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = m$$

Oss. Che relazione c'è in generale tra $\text{rank}(A)$ e $\text{rank}(A')$.

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A') \leq \text{rank}(A) + 1$$

(Basta pensare al rank come C-rank: se aggiungo una colonna, il max numero di colonne lin. indep. può
→ restare uguale
→ crescere di 1)

Dim ① Il sistema ha almeno una soluzione se e solo se b è comb. lin. di $C_1, \dots, C_m$ (le colonne di A), ma in tal caso allora i due rank sono uguali.

② Quando ci sono soluzioni, sappiamo che tutte le soluzioni si scrivono come

$$x = x_0 + \overset{\text{parametri liberi}}{\downarrow} C_1 \overset{\downarrow}{U_1} + \dots + C_k \overset{\downarrow}{U_k}$$

↑
base delle soluzioni
di $Ax = 0$

cioè del ker dell'applic. associata ad A

Ma allora

$$\# \text{parametri} = \dim(\ker(A)) \overset{\text{rank-nullity}}{\downarrow} = m - \dim(\text{Im}(A))$$

$$= m - \text{rank}(A) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{C-rank}}}{=} \text{rank}(A')$$

③ Facile conseguenza se voglio 0 parametri, ma esistenza di una soluzione.

— o — o —

Riassunto Abbiamo 3 approcci ad un sistema lineare

- Lavorare alla Gauss (comodo e funziona sempre)
- CRAMER (richiede che il sistema sia quadrato e richiede il calcolo di $\det$, che è scomodo se il sistema è grande. Può diventare utile
 - se ci sono tanti 0 nella matrice
 - se mi serve trovare una singola incognita)
- ROUCHÉ-CAPELLI (funziona per sistemi generali, ma richiede dei determinanti per fare i ranghi, e NON calcola la soluzione. Può essere comodo nel caso di sistemi con parametri).

Per il calcolo della matrice inversa (utile anche per sistemi quadrati

$$Ax = b \rightsquigarrow x = A^{-1}b) \text{ abbiamo 2 procedimenti}$$

- partire da $(A|I)$ e arrivare a $(I|B)$
 $\uparrow$ è A^{-1}

- usare la formula con i $\det$ (scomodo nei casi grandi).

Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 5 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$$

All'antica Lavoro alla Gauss portando dietro λ

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 5 \\ (-6 - 7\lambda)y = -19 \end{cases}$$

Se $-6 - 7\lambda = 0$, cioè $\lambda = -\frac{6}{7}$, allora il sistema è impossibile, altrimenti soluz. unica

Più moderno

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & \lambda & \textcircled{5} \\ \textcircled{7} & -3 & \textcircled{8} \end{pmatrix} = A'$$

Osservo subito che $\text{rang}(A') = 2$. Pensando al D-rango, basta trovare sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$.

A questo punto per Rouché - Capelli il sistema ha sol. se e solo se

$$\text{rang}(A) = 2$$

cioè se e solo se $\text{Det } A \neq 0$

$$\text{Det } A = -6 - 7\lambda \quad \text{da cui la stessa cond. di prima,}$$

incogn. rango

Quando c'è sol., questa dipende da $\overset{\downarrow}{2} - \overset{\downarrow}{2} = 0$ parametri, quindi è unica.

Esempio 2 Studiare, al variare dei parametri a e b , il numero di soluzioni di

$$\begin{cases} 2x + 3y + az = 8 \\ x - y = b \\ x + y - 3z = 5 \end{cases}$$

Quando le matrici

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & \textcircled{3} & a & 8 \\ \textcircled{1} & \textcircled{-1} & 0 & b \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Fatto 1 $\text{Rang}(A)$ è 2 oppure 3

(Più di 3 non è ed esiste una sottomatrice 2×2 con $\text{Det} \neq 0$)

Fatto 2 Se $\text{Rang}(A) = 3$, allora il sistema ha sol. unica

(Infatti $\text{rang}(A')$ almeno 3 deve valere e di più non può perché le righe sono solo 3. Quindi $\text{Rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$)

Quindi la soluzione esiste e dipende da 0 parametri)

Quanto è che $\text{Rango}(A) = 3$? Se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = 6 + a + a + 9 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2a = -15 \quad (\Rightarrow) \quad a = -\frac{15}{2}$$

Quindi se $a \neq -\frac{15}{2}$, allora la solut. è unica, indep. da b .

Fatto 3 Che succede se $a = -\frac{15}{2}$? $\text{Rango}(A) = 2$.

Se $\text{rang}(A') = 2$, allora ci saranno soluz. dipendenti da $3 - 2 = 1$ parametri.

Se rango $(A') = 3$, e allora niente soluzioni.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -\frac{15}{2} & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

↑ se $\text{ranko}(A') = 2$, questa sottomatrice deve avere $\text{Det} = 0$.

$$-\frac{15}{2}b + 24 - \frac{75}{2} + 9b = 0 \quad \leadsto \text{Trovo } b$$

Se $a = -\frac{15}{2}$ e $b \neq$ quello che trovo, allora nessuna soluzione
($\text{ranko}(A) = 2 < 3 = \text{ranko}(A')$)

Se $a = -\frac{15}{2}$ e $b =$ quello che trovo, allora volendo risolvere con Gauss. Non posso concludere subito che $\text{rank}(A') = 2$, perché per dimostrarlo mi servirebbe l'annullamento di TUTTI i $\text{Det } 3 \times 3$ (e questi sono 4).

In realtà bastano i due che ho fatto (spiegazione nel video)

— 0 — 0 —

↑
e qui sotto

Spiegazione: 2^a e 3^a colonna sono lin. indip.; la 1^a è comb. lin. di 2^a e 3^a (primo Det), la 4^a è comb. lin. di 2^a e 3^a (secondo Det)
 $\leadsto$ C-rango $(A') = 2$.