

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $n \times m$. Si definisce

- R-rango il max numero di righe lin. indep. (di sicuro $\leq n$)
- C-rango il max numero di colonne lin. indep. (" " $\leq m$)
- D-rango il più grande k per cui esiste una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$. (di sicuro $\leq \min\{m, n\}$)

Caratterizzazioni

C-rango $\rightarrow$ max numero col. lin. indep.
 $\rightarrow \dim \text{Span}(C_1, C_2, \dots, C_m)$
 $\rightarrow$ dimensione di $\text{Im}(A)$ vista come $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

R-rango $\rightarrow$ max numero righe lin. indep.
 $\rightarrow \dim \text{Span}(R_1, \dots, R_n)$
 $\rightarrow$ dimensione di $\text{Im}(A^t)$ vista come $A^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

D-rango Succede che D-rango = k se accadono 2 cose
 $\rightarrow$ esiste ALMENO una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$
 $\rightarrow$ TUTTE le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

TEOREMA FONDAMENTALE

Qualunque sia la matrice, vale che

$$\text{R-rango} = \text{C-rango} = \text{D-rango}$$

(e quindi useremo solo la parola
rango senza specificazione)

C-rango occhio: quando lavoro alla Gauss, lo Span delle colonne può cambiare, ma la sua dimensione NO.

Abbiamo visto a suo tempo che lavorare alla Gauss non cambia le soluz. del sistema lineare $Ax=0$.

Sia A' ottenuta da A lavorando alla Gauss. Allora

$$\text{C-rango di } A = \dim \text{Im}(A)$$

$$\begin{aligned} \text{rank-nullity} \nearrow &= m - \dim(\ker(A)) \\ &= m - \dim(\ker(A')) \end{aligned}$$

i due $\ker$ sono uguali perché sono le soluz. di $Ax=0$ e $A'x=0$

$$\text{rank-nullity} \nearrow = \dim \text{Im}(A')$$

$$= \text{C-rango di } A'$$

— 0 — 0 —

Dim. Prop. 2

Consideriamo una matrice a scala. Supponiamo che abbia p PIVOT.

$$\begin{pmatrix} * & & & & \text{roba} \\ 0 & 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ 0 & \text{-----} & 0 \end{pmatrix}$$

R-rango = p

È evidente che il max numero di righe lin. indep. è $\leq p$.

Dico che le prime righe, quelle con i PIVOT, sono davvero lin. indep., e quindi sono proprio p .
Supponiamo che

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_p R_p = 0$$

Ora

- $x_1 = 0$ perché è l'unico modo per ottenere 0 nella posiz. del primo PIVOT

- Una volta che so che $x_1 = 0$, allora anche $x_2 = 0$ perché è l'unico modo di avere 0 nella posiz. del secondo PIVOT.
- Si procede allo stesso modo fino alla fine.

$$\boxed{C\text{-rank} = p}$$

Osserviamo che tutte le colonne della matrice hanno tutti 0 dalla $(p+1)$ -esima posizione in poi, quindi è come fossero vettori in $\mathbb{R}^p$.
Quindi al max p colonne sono lin. indep., cioè
 $C\text{-rank} \leq p$.

Ora voglio trovare p colonne che sono davvero lin. indep.

Scelgo quelle corrispondenti ai PIVOT e le chiamo $C_1, \dots, C_p$ (non sono per forza le prime p)
Se

$$x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = 0$$

allora posso dimostrare che $x_1 = \dots = x_p = 0$
partendo dal fondo e ragionando esattamente come con le righe (C_p è l'unica che ha l'ultimo el. $\neq 0$, quindi per forza $x_p = 0, \dots$)
— 0 — 0 —

$$\boxed{R\text{-rank} = D\text{-rank}}$$

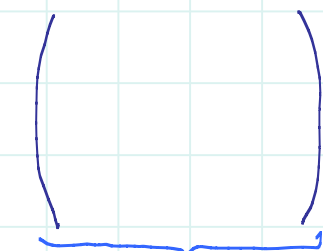
$$\boxed{D\text{-rank} \leq R\text{-rank}}$$

Supponiamo che $R\text{-rank} = k$.

Devo far vedere che tutte le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

Prendiamone una qualunque.

Consideriamo le corrispondenti righe di A . Esse sono lin. dip., ma allora sono lin. dip. anche le loro restrizioni alla sottomatrice. Ma allora la sottomatrice ha righe lin. dip., quindi $\det = 0$.



Sottomatrice $(k+1) \times (k+1)$

R-rango $\leq$ D-rango

Supponiamo che R-rango $= k$.

Devo trovare una sottomatrice $k \times k$ che abbia $\det \neq 0$.

Scelgo k righe lin. indep. e butto il resto

$$\begin{matrix} R_1 & \rightarrow \\ R_2 & \rightarrow \\ \vdots & \rightarrow \\ R_k & \rightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) \begin{matrix} \xleftarrow{m} \\ \xrightarrow{k} \end{matrix}$$

Otengo una matrice $k \times m$ che ha k righe lin. indep., quindi con R-rango $= k$. Ma allora tale matrice sappiamo già che ha C-rango $= k$, quindi ha k colonne lin. indep.

Salvo queste e butto il resto. Ho ottenuto una $k \times k$ e questa ha $\det \neq 0$ perché ha le colonne lin. indep. (o volendo perché la sua trasposta ha le righe lin. indep.).

— o — o —