

9 TRE APPLICAZIONI CLASSICHE DEL DETERMINANTE

9.1 Formula misteriosa per vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$

Dati $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, cerco un vettore $\perp$ a U e W

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

$\text{Det}(A_{1,1}) \quad - \text{Det}(A_{1,2}) \quad \text{Det}(A_{1,3})$

Verifichiamo che il vettore ottenuto è $\perp$ a U .

Sostituisco gli asterischi con u_1, u_2, u_3 . Ottengo

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

ci sono 2 righe uguali
 $0 = \text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{rispetto 1}^{\text{a}} \text{ riga}}}{=} u_1 \cdot \text{Det}(A_{1,1}) - u_2 \text{Det}(A_{1,2}) + u_3 \text{Det}(A_{1,3})$
 = prodotto scalare tra U e il vettore prodotto dalla formula ex-misteriosa

Verifichiamo che il vettore ottenuto è $\perp$ a W

Stessa cosa a partire dalla matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$R_1 = R_3$
 $0 = \text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{1}^{\text{a}} \text{ riga}}}{=} w_1 \text{Det}(A_{1,1}) - w_2 \text{Det}(A_{1,2}) + w_3 \text{Det}(A_{1,3})$

Analogo in dimensione 4 o più

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,1}}, -\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,2}}, \overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,3}}, -\overset{\uparrow}{\text{Det } A_{1,4}})$$

Tutti determinanti 3×3

Il vettore prodotto dalla formula è $\perp$ ai 3 vettori v, w, z .

Alternativa brutta: risolvo il sistema lineare

$$v_1 a + v_2 b + v_3 c + v_4 d = 0$$

$$w_1 a + w_2 b + w_3 c + w_4 d = 0$$

$$z_1 a + z_2 b + z_3 c + z_4 d = 0$$

nelle incognite a, b, c, d (le soluzioni del sistema hanno ALMENO un grado di libertà, perché posso moltiplicare ogni soluzione per un qualunque scalare).

— 0 — 0 —

9.2 Formula di CRAMER per i sistemi lineari

Setting: sistemi quadrati del tipo $Ax = b$ $\begin{matrix} \nearrow n \text{ termini noti} \\ (n \text{ equ.}) \end{matrix}$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{matrice} \\ n \times n \\ \text{quadrata} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ n \text{ incognite} \end{matrix}$

Formula di CRAMER:

$$x_i = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)}$$

dove

- A è la matrice dei coeff.
- A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con b .

Esempio

$$\begin{aligned}x - z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= 5 \\ x - y + 5z &= 0\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

ho sostituito la
prima colonna con
i termini noti

$$x = \frac{\text{Det}(A)}{\text{Det}(A)}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ho sostituito la
seconda
colonna

$$y = \frac{\text{Det}(A)}{\text{Det}(A)}$$

Stessa cosa per z .

Oss. La formula funziona quando $\text{Det}(A) \neq 0$. In questo caso il sistema ha sempre soluzione unica, qualunque sia la colonna dei termini noti.

($\text{Det } A \neq 0 \Rightarrow$ le colonne sono lin. indep.

$\uparrow$ propr. dei Det.

$\Rightarrow$ le colonne sono una base

$\uparrow$ sono n e sono dunque n

$\Rightarrow$ ogni b si scrive in modo unico come

$\uparrow$ comb. lin. delle colonne

proprietà delle base

)

Dim. formula di Cramer

Siano $C_1, \dots, C_n$ le colonne di A

Supponiamo che $(x_1, \dots, x_n)$ sia una soluzione del sistema, cioè

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$$

$$\det(A_i) = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posiz. } i}}{b}, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

$$= \det(C_1, \dots, C_{i-1}, \underbrace{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n}_{\text{posiz. } i}, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

porto la comb. lin. fuori

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &= x_1 \det(C_1, \dots, C_1, \dots, C_n) + \\ &\quad x_2 \det(C_1, \dots, C_2, \dots, C_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad x_i \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad x_n \det(C_1, \dots, C_n, \dots, C_n) \end{aligned}$$

essendo $\det A = \det(A^t)$
quello che potevamo fare con le righe lo possiamo fare con le colonne

$$= x_i \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = x_i \det(A)$$

$\uparrow$
in tutte le altre matrici
c'è una colonna ripetuta
2 volte

$$\text{Quindi } \det(A_i) = x_i \det(A). \quad \therefore$$

— o — o —

9.3 Formula per matrice inversa

Data A matrice $n \times n$, voglio trovare A^{-1} .

Algoritmo : $\rightarrow$ calcolare $\det(A_{i,j})$
 $\rightarrow$ segui a scacchiera
 $\rightarrow$ trasposta
 $\rightarrow$ divido per $\det(A)$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

→ Sostituisco $a_{i,j}$ con $\det(A_{i,j})$

$$\begin{pmatrix} 7 & -35 & -7 \\ 7 & -19 & -15 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Cambio i segni a scacchiera

$$\begin{pmatrix} 7 & 35 & -7 \\ -7 & -19 & 15 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Faccio la trasposta

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 35 & -19 & -5 \\ -7 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Dividendo tutto per $\det(A)$, che si calcola, ottengo A^{-1} .

Perché funziona l'algoritmo?

Indichiamo con $x_{i,j}$ gli elementi dell'inversa

$AA^{-1} = Id$. Consideriamo la j -esima colonna di A^{-1} e immaginiamo di fare il prodotto

$$A \left(* \begin{vmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{vmatrix} * \right) = \left(* \begin{vmatrix} Ax \end{vmatrix} * \right)$$

$\uparrow$
colonna j

Ora vogliamo che $Ax = b$, dove b ha tutti 0, tranne
nella riga j dove c'è 1

A questo punto calcoleremo x usando CRAMER

$\text{Det}(A_i) \leftarrow$ ho messo b al posto della colonna i

$$x_{i,j} = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)} \quad \leftarrow \text{passo 4 dell'algoritmo}$$

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c|c} * & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & * \end{array} \right) \leftarrow \text{riga } j$$

$\uparrow$
colonna i

Alla fine $\text{Det } A_i =$

$\uparrow$
Laplace rispetto
colonna i

$(-1)^{i+j} \text{Det}(A_{j,i})$

$\uparrow \quad \uparrow$
riga colonna

$\nwarrow \quad \nearrow$
segui trasposta

e questo è proprio quello che dice l'algoritmo

— 0 — 0 —