

⑦ SVILUPPI DI LEIBNIZ Quali sono i termini che compaiono in un determinante?

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \dots + bfg$$

↑
prodotto di 3 elementi,
presi in righe e colonne diverse

Analogamente: un Det $n \times n$ è la somma di tanti termini, ciascuno dei quali è il prodotto di n elementi della matrice, tutti presi da righe e colonne diverse. Il segno può essere $+$ o $-$, con la solita regola degli scambi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \dots \pm 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7$$

$$(e_2, e_3, e_1, e_4) \rightsquigarrow (e_1, e_3, e_2, e_4) \rightsquigarrow (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

Segno = $(-1)^{\# \text{ scambi}}$, quindi nel nostro caso è $+$.

Domanda: quanti sono gli addendi nel Det 4×4 ? 24

Abbiamo: 4 scelte per l'el. della 1^a riga

3 " " " 2^a "

2 " " " 3^a "

La quarta riga è obbligata

Nel caso $n \times n$ i termini sono $n!$

Oss. L'utilità di Leibniz è teorica, perché si può verificare che la formula ottenuta verifica le 4 proprietà

⑧ TEOREMA DI BINET Se A e B sono matrici $n \times n$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Conseguenza: una matrice A è invertibile se e solo se

$$\det(A) \neq 0$$

ed in tal caso

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dim Se $A \cdot A^{-1} = Id$, allora $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(Id) = 1$.

Per la parte di esistenza, la matrice A è invertibile se e solo se la corrisp. applic. lin. è iniettiva e surgettiva. Essendo le dim. uguali basta la surgettività, cioè avere le colonne lin. indep. Ma allora A^t ha le righe lin. indep., cioè $\det(A^t) \neq 0$
" $\det(A)$.

— 0 — 0 —

Dim. tes. di Binet

Per prima cosa si distinguono 2 casi

$$\rightarrow \det B \neq 0$$

$$\rightarrow \det B = 0$$

Det B $\neq 0$ Considero la funzione

$$f(A) := \frac{\text{Det}(AB)}{\text{Det}(B)}$$

Vorrei tanto che $f(A) = \text{Det}(A)$. Basta dim. che $f(A)$ ha le solite 4 proprietà.

Det 1 $f(\text{Id}) = 1$ ovvio perché $f(\text{Id}) = \frac{\text{Det}(B)}{\text{Det}(B)} = 1$

Det 2 Se A ha 2 righe uguali, allora anche AB ha 2 righe uguali (segue dalla formula righe. colonne), ma allora

$$f(A) = \frac{\text{Det}(AB)}{\text{Det}(B)} = 0$$

Det 3 Se $A = A_1 + A_2$ con A_1 e A_2 che differiscono solo per una riga, allora $AB = A_1B + A_2B$
 $\uparrow$ uguali $\uparrow$ tranne che in una riga

$$\begin{aligned} f(A_1 + A_2) &= \frac{\text{Det}(A_1B + A_2B)}{\text{Det } B} = \frac{\text{Det}(A_1B)}{\text{Det } B} + \frac{\text{Det}(A_2B)}{\text{Det } B} \\ &= f(A_1) + f(A_2). \end{aligned}$$

Det 4 Se moltiplico per λ una riga di A , allora la stessa riga di AB viene moltiplicata per λ e quindi il numeratore viene moltip. per λ

Caso $\text{Det } B = 0$ Voglio dimostrare che anche $\text{Det } (AB) = 0$

Giro pensiero:

$$\text{Det } B = 0 \Leftrightarrow \text{Det } (B^t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{righe di } B^t \text{ sono lin. dip.}$$

$$\Leftrightarrow \text{colonne di } B \text{ sono lin. dip.}$$

$$\stackrel{?}{\Leftrightarrow} \text{colonne di } (AB) \text{ sono lin. dip.}$$

$$\Leftrightarrow \text{righe di } (AB)^t \text{ sono lin. dip.}$$

$$\Leftrightarrow \text{Det } ((AB)^t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Det } (AB) = 0$$

Resta da controllare il ?

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{array} \right) \Rightarrow AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AC_1 & AC_2 & \dots & AC_m \end{array} \right)$$

$\uparrow$
vero per le
colonne

Se esiste una relazione $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_m C_m = 0$ senza che tutti gli x_i siano nulli, allora applicando A troviamo che anche

$$x_1 AC_1 + \dots + x_m AC_m = 0 \quad \leadsto \text{le colonne di } AB \text{ sono lin. dip.}$$

"

$$A(x_1 C_1 + \dots + x_m C_m)$$

Esempio 1 Consideriamo i polinomi

$$1+x$$

$$12+x^2$$

$$1+x+x^3$$

$$3+x-6x^3$$

Domanda: sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$?

Risposta preistorica: controllo che siano generatori E siano liu. indep.

Risposta antica: controllo la liu. indep., cioè impongo
 $a(1+x) + b(12+x^2) + c(1+x+x^3) + d(3+x-6x^3) = 0$
e spero che $a=b=c=d=0$.

Risposta moderna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Li ho messi in riga,
ma in colonna andava
bene uguale

$$\text{Det} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3}^\circ \text{ colonna}}}{-1} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = -(-6+3+6-1) = -2 \neq 0$$

$\leadsto$ sono una base

Esempio 2 Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ le basi

$$\{(1,3), (7,1)\}$$

v_1

v_2

$$\{(1,4), (1,5)\}$$

w_1

w_2

Scrivere la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla $\{w_1, w_2\}$.

Metodo bovino

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array}$$

$$(1,3) = a(1,4) + b(1,5)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
prima colonna

Più astuto

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Da $\{w_1, w_2\}$ alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

"

$\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow$ canonica $\rightsquigarrow \{w_1, w_2\}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 34 \\ -1 & -27 \end{pmatrix}$$

→ prende in INPUT
componenti rispetto
a $\{v_1, v_2\}$ e restituisce
componenti rispetto a
 $\{w_1, w_2\}$

— o — o —