

⑥ SVILUPPI DI LAPLACE

Sottomatrici Data una matrice, una sottomatrice si ottiene cancellando alcune righe / colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Minori Sono i determinanti di tutte le sottomatrici quotate

Caso speciale Data una matrice quadrata $A \in M_{n \times n}$, si indica con $A_{i,j}$ la sottomatrice che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j . Chiaramente $A_{i,j} \in M_{(n-1) \times (n-1)}$

Sviluppi di Laplace rispetto alla 1ª colonna Sia $A \in M_{n \times n}$. Allora

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}$$

con questa formula si può calcolare un $\det n \times n$ se si sanno calcolare i $\det (n-1) \times (n-1)$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

$$a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Sviluppo di LAPLACE rispetto alla colonna j

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \text{Det}(A_{i,j})$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

Sviluppando risp. alla seconda colonna

$$-b \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + e \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} - h \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$$

Teorema Gli sviluppi di Laplace rispetto ad una qualunque colonna sono sempre uguali al $\text{Det}(A)$.

Idea della dim. Consideriamo risp. prima colonna.

Basta dim. che il risultato della formula soddisfa $(\text{Det } 1)$, $(\text{Det } 2)$, $(\text{Det } 3)$ e $(\text{Det } 4)$.

Det 1 Resta solo il primo addendo che fa proprio 1.

Det 2 Se $R_i = R_j$, allora in tutte le sottomatrici quelle 2 righe sono ancora uguali. Ci sono solo le 2 eccezioni in cui quelle righe sono state cancellate. Quei termini si cancellano per la scelta dei segni.

Det 3 Se $R_i = R_i' + R_i''$, allora il Det è la somma dei Det . La stessa cosa succede in tutte le sottomatrici tranne quella in cui si cancella quella riga, ma in quel caso $a_{i,1} = a_{i',1} + a_{i'',1}$.

Det 4 Il fatto che le costanti escano fuori è quasi ovvio
— o — o —

Osservazione Logica

- Il teo. misterioso mostra che esiste una funzione che soddisfa le 4 richieste.
- L'eliminazione alla Gauss, e il conto finale per le matrici triangolari ci dice che è unica.

(Ocdio: Gauss non dice che esiste, perché lavorando in modo diverso potremmo ottenere risultati diversi, e in questo caso vorrebbe dire che $(\text{Det } 1) \dots (\text{Det } 4)$ sono tra di loro NON compatibili).

Sviluppi di Laplace per riga Fisso la riga i

$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \text{Det}(A_{i,j})$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Rispetto alla 3^a riga:

$$g \text{Det} \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} - h \text{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} + i \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

Oss. Negli sviluppi per riga / colonna i segni sono presi a scacchiera, partendo con + in alto a sx

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

Teorema Gli sviluppi per riga coincidono con quelli per colonna.

Corollario $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$

Dica Sviluppare $\text{Det}(A)$ per riga è come sviluppare $\text{Det}(A^t)$ per colonna.

Dim teorema Sviluppiamo lungo la riga i .

Caso molto semplice Nella riga i ci sono tutti 0, tranne un 1 in posizione j

riga i $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

↑
colonna j

Sviluppo per riga =
 $(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \text{Det}(A_{i,j})$

Se sviluppo rispetto alla colonna j ottengo lo stesso termine e gli altri sono tutti 0 perché le sottomatrici hanno una riga di 0.

Caso altrettanto semplice Nella riga i ci sono tutti 0, tranne un λ nella posizione j .
Questo caso è come il precedente

Caso generale Nella riga i c'è di tutto!

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ & * & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{riga } i \end{matrix} = \begin{pmatrix} * & & & \\ c_1 & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + \dots$$

$M_1 \qquad M_2 \qquad M_3 \dots$

$$\text{Det}(M) = \text{Det}(M_1) + \text{Det}(M_2) + \dots + \text{Det}(M_m)$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & (-1)^{i+1} \underbrace{c_1 \text{Det } A_{i,1}}_{\text{casi precedenti}} + (-1)^{i+2} \underbrace{c_2 \text{Det } (A_{i,2})}_{\text{casi precedenti}} + \dots \end{aligned}$$

Così si ottiene lo sviluppo per riga

Achtung! Non è vero che $\text{Det}(A+B) = \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$
 Questo vale solo se A e B differiscono solo in una riga (nel qual caso è proprio la (Det 3))

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppo risp. 2ª riga

$$\text{Det } A = 2 \cdot 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (40 - 24 - 8) = 16$$

Come calcolo un Det?

→ Se 2×2 o 3×3 uso Sarrus

→ Se ci sono tanti 0, uso Laplace con righe / colonne giuste

→ Se è pieno di tutto, allora uso Gauss.

— 0 — 0 —