

Caso 3×3

$$v_1 = (a, b, c)$$

$$v_2 = (d, e, f)$$

$$v_3 = (g, h, i)$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + ee_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3)$$

= vengono 27 termini, di cui molti sono nulli
 [espandere per esercizio]

$$= aei \text{Det}(e_1, e_2, e_3) + a \overbrace{fh}^{-1} \text{Det}(e_1, \overbrace{e_3, e_2}^{-1})$$

$$+ bdi \text{Det}(\overbrace{e_2, e_1}^{-1}, e_3) + b \overbrace{fg}^{-1} \text{Det}(e_2, e_3, \overbrace{e_1}^{-1})$$

$$+ cdh \text{Det}(e_3, e_1, e_2) + c \overbrace{eg}^{-1} \text{Det}(e_3, e_2, \overbrace{e_1}^{-1})$$

$$\text{Det}(e_2, e_3, e_1) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$\text{Det}(e_3, e_1, e_2) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \dots = 1$$

$$= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

REGOLA DI SARRUS (per ricordare la formula)

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & c \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

↑
ricopio prime
2 colonne

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= 1 + 0 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) \\ &= 1 + 0 - 6 - 10 - 0 + 4 = 5 - 16 = -11 \end{aligned}$$

Questo ci dice che $(1, 0, 2)$, $(3, 1, 4)$, $(5, -1, 1)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Achtung! Sarrus funziona SOLO con 2×2 e 3×3 .

④ Determinante e algoritmo di Gauss

Se lavoro alla Gauss, che succede al det?

→ Se scambio 2 righe, det. cambia segno (Det 6)

→ Se sostituisco R_i con $R_i + b R_j$ (ultra-ortodossa)

$\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_n)$ iniziale

$\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i + b R_j, \dots, R_n)$

$$\begin{aligned} &= \text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_n) \\ &\quad + b \underset{0}{\text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_j, \dots, R_n)} \end{aligned}$$

Il determinante NON cambia

→ Se sostituisco R_i con $a R_i + b R_j$ (qualunque) il Det viene moltiplicato per a .

Se sappiamo fare il Det alla fine, allora sappiamo il Det iniziale

⑤ Matrici diagonali e triangolari

Matrice diagonale = numeri sulla diag. principale, zeri altrove
 anche 0

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= \text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, \lambda_3 e_3, \dots, \lambda_m e_m) \\ &= \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_m) \end{aligned}$$

Matrice triangolare superiore = roba sulla diag. Oppure sopra,
 zeri sotto.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \text{roba} & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$$

Dim Scrivo la prima riga come

$$\lambda_1 e_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altri numeri della} \\ \text{prima riga}}}{c_2} e_2 + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tutto il resto, cioè una} \\ \text{comb. lin. di } e_2, e_3, \dots, e_m}}{c_m} e_m = \lambda_1 e_1 + w$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(R_1, R_2, \dots, R_m) &= \text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, R_2, \dots, R_m) \\ &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, R_2, \dots, R_m) + \underset{0}{\text{Det}(w, R_2, \dots, R_m)} \end{aligned}$$

Osservo che $w, R_2, \dots, R_n$ sono n vettori con uno 0 in testa, quindi è come se fossero n vettori in $\mathbb{R}^{n-1}$, quindi sono LIN.DIP., quindi il loro Det = 0.

Quindi

$$\text{Det}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, R_2, R_3, \dots, R_n) = (*)$$

Ora scrivo $R_2 = \lambda_2 e_2 + \underbrace{c_3 e_3 + \dots + c_n e_n}_w$

$$(*) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, R_3, \dots, R_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, R_3, \dots, R_n) + \lambda_1 \underbrace{\text{Det}(e_1, w, R_3, \dots, R_n)}_0$$

Sono n vettori con 0 sulla seconda componente

Procedendo allo stesso modo per n passaggi resta

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{Det}(\underbrace{e_1}_{1}, e_2, \dots, e_n)$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo Det con Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

operazioni
ultra-ortodosse
 $\Rightarrow$ Det non cambia

$$\text{Det finale} = \text{Det iniziale} = -11$$

Oss importante

Quando lavoro alla Gauss, lo Span delle righe NON cambia

Se scambio le righe è ovvio, altrimenti $R_i \rightsquigarrow aR_i + bR_j$ posso usare il lemma di eliminazione

$$\text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m) = \text{Span}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m, aR_i + bR_j)$$

↑
posso eliminare
l'ultimo, che è
comb. lin. degli altri

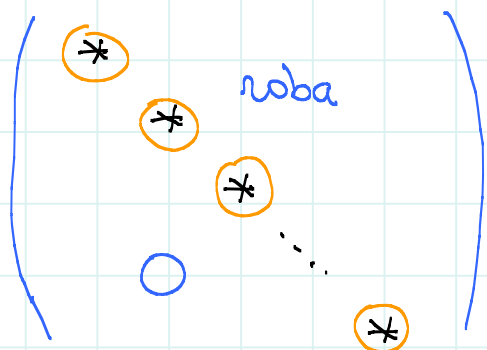
eliminato

$$= \text{Span}(R_1, \dots, \cancel{R_i}, \dots, R_m, aR_i + bR_j)$$

↑
posso eliminare R_i ,
che è comb. lin. di
 R_j e dell'ultimo

Se $R_1, \dots, R_m$ sono LIN. INDIP., alla fine del procedimento alla Gauss trovo una matrice a scala con l'ultima riga non tutta nulla (altrimenti il suo Span è sceso).

Ma allora tutti i gradini sono da uno, e quindi tutte le righe/colonne hanno PIVOT $\neq 0$



Quindi $\text{Det} \neq 0$

ORA SIAMO ALLA FINE DELL'OPERA, cioè

$$v_1, \dots, v_m \text{ lin. indep.} \Rightarrow \text{Det} \neq 0$$

— 0 — 0 —