

① Dati n vettori in $\mathbb{R}^n$, come determino se sono una base?

PRIMA: controllo lin. indip. e/o essere generatori

DOPO: calcolo un **DETERMINANTE**

② Dati k vettori in $\mathbb{R}^n$, come determino la dim. del loro span?

PRIMA: lin. indip. e lemma di eliminazione

DOPO: calcolo un **RANGO**

Due modi di vedere il Det

→ Prende in INPUT n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce un numero.
Il numero è 0 $\Leftrightarrow$ sono lin. dip.

→ Prende in INPUT una matrice $n \times n$ e restituisce un numero
(il collegamento è usare quei n vettori come righe di una matrice $n \times n$)

INDICE ① Definizione (assiomatica)

② Prime conseguenze

③ Casi 2×2 e 3×3

④ Determinante e algoritmo di Gauss

⑤ Casi di matrici diagonali e triangolari

⑥ Sviluppi di LAPLACE

⑦ Sviluppi di LEIBNIZ

⑧ Teorema di BINET

⑨ Applicazioni classiche

→ Formula misteriosa

→ Formula di CRAMER per sistemi lineari

→ Formula per matrice inversa

① Definizione assiomatica Vogliamo che abbia 4 proprietà

$$(\text{Det } 1) \quad \text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

↑ base canonica

↑ messi a matrice viene la matrice Id

(Det 2) Se fra gli n vettori ce ne sono 2 uguali, allora $\text{Det} = 0$
(se la matrice ha 2 righe uguali...)

$$(\text{Det } 3) \quad \text{Det}(v_1, \dots, v_i + \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

$$= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

"le somme escono fuori"

$$(\text{Det } 4) \quad \text{Det}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

↑ numero

"le costanti escono fuori"

Teorema (misterioso) Esiste un'UNICA funzione che ha queste proprietà.

② Prime conseguenze

(Det 5) "le comb. lin. escono fuori"

$$\text{Det}(v_1, \dots, c_1 w_1 + \dots + c_k w_k, \dots, v_n)$$

↑ posizione i

↓

posiz i

↑

$$= c_1 \text{Det}(v_1, \dots, w_1, \dots, v_n) + \dots + c_k \text{Det}(v_1, \dots, w_k, \dots, v_n)$$

Dim: con la (Det 3) tiro fuori la somma, poi con la (Det 4) le costanti.

(Det 6) "Alternanza"

"Se scambio tra di loro due degli n vettori, allora il det cambia segno"

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = -\text{Det}(v_1, \dots, \overset{\text{posiz. } i}{\downarrow} v_j, \dots, \overset{\text{posiz. } j}{\downarrow} v_i, \dots, v_m)$$

Dim

$$0 = \text{Det}(v_1, \dots, \overset{\uparrow \text{(Det 2)}}{v_i + v_j}, \dots, \overset{\uparrow \text{pos. } i}{v_i + v_j}, \dots, v_m)$$

$$= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_m) + \text{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_m)$$

↑ tiro fuori la 1ª somma

$$\begin{aligned} &= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_m) \rightarrow 0 \\ &+ \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) \\ &+ \text{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m) \quad \left. \begin{array}{l} \text{uno opposto dell'altro} \end{array} \right\} \\ &+ \text{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(Det 7) Supponiamo che v_1 sia comb. lin. di $v_2, \dots, v_m$
ad esempio

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$$

$$\text{Allora } \text{Det}(v_1, v_2, \dots, v_m) = 0$$

Dim: uso la (Det 5) e ottengo

$$\begin{aligned} &\text{Det}(c_2 v_2 + \dots + c_m v_m, v_2, \dots, v_m) \\ &= c_2 \text{Det}(\underbrace{v_2, v_2}_{\rightarrow 0}, \dots, v_m) + \dots + c_m \text{Det}(v_m, \underbrace{v_2, \dots, v_m}_{\rightarrow 0}) \end{aligned}$$

sono tutti 0 per colpa (o merito) della Det 2.

(Det 8) Se $v_1, \dots, v_m$ sono LIN. DIP., allora $\text{Det} = 0$

Dim: basta ricavare uno in funzione degli altri.

A meno di fare scambi di vettori, possiamo supporre sempre che sia il primo.

IN QUESTO MOMENTO SIAMO A METÀ (LIN. DIP. $\Rightarrow \text{Det} = 0$)
Manca l'altra freccia.

③ Caso 2×2 Siano $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$

Dico che

$$\text{Det}(v_1, v_2) = ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dim $\text{Det}(v_1, v_2) = \text{Det}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$
 $= a \text{Det}(e_1, ce_1 + de_2) + b \text{Det}(e_2, ce_1 + de_2)$

$$= ac \text{Det}(e_1, e_1) + ad \text{Det}(e_1, e_2)$$

$\underbrace{\text{Det}(e_1, e_1)}_0 \quad \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2)}_{1 \text{ per la (Det 1)}}$

$$+ bc \text{Det}(e_2, e_1) + bd \text{Det}(e_2, e_2)$$

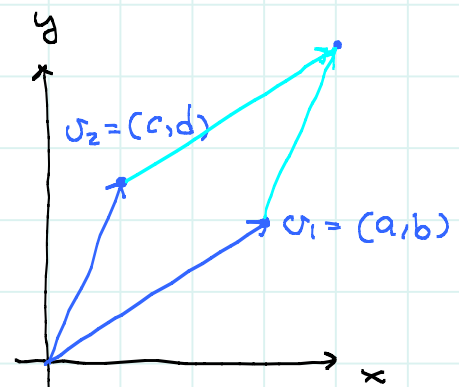
$$\underbrace{\text{Det}(e_2, e_1)}_{-1} + bd \underbrace{\text{Det}(e_2, e_2)}_0$$

$-\text{Det}(e_1, e_2) \text{ per la (Det 6)}$

$$= ad - bc$$

Interpretazione geometrica

$\text{Det}(v_1, v_2) = \text{Area parall. con segno}$
(+ se v_1 va su v_2 in
senso antiorario)



Dall'interp. geometrica segue

→ la faccenda dello scambio dei segni

→ il fatto che viene 0 se e solo se v_1 e v_2 sono multipli, cioè se e solo se sono lin. DIP.

Come si dim. l'interp. geom.?

1° modo (Ultra-bovino) Scompongo in rettangoli e triangoli, con enormi complicazioni a seconda dei quadranti

2° modo Area = Doto · Doto · sine (angolo compreso)

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \sqrt{\cancel{a^2 c^2} + a^2 d^2 + b^2 c^2 + \cancel{b^2 d^2} - \cancel{a^2 c^2} - \cancel{b^2 d^2} - 2abcd}$$

$$= \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc| = |\text{Det}|.$$

= 2 Area triangolo con vertici $0, v_1, v_2$.

— 0 — 0 —