

MATRICE INVERSA

Data una matrice $n \times n$ A , si dice inversa di A la matrice B tale che

$$AB = BA = Id$$

↑ matrice identica

La matrice inversa, se esiste, è unica.

Se A rappresenta una certa applicazione lin. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora B rappresenta l'applicazione inversa (prodotto di matrici = composizione di applic. lin.), dunque B esiste se e solo se f è iniettiva e surgettiva. Essendo lin. tra spazi della stessa dim f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Quindi B esiste se e solo se

$$Ax = 0$$

ha solo la solut. $x=0$, il che è vero se e solo se le colonne di A sono lin. indep.

Proprietà facili

$$\textcircled{1} \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (A \text{ e } B \text{ sono } n \times n)$$

Verifica $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A \cdot Id \cdot A^{-1} = AA^{-1} = Id$

$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1} \cdot Id \cdot B = B^{-1}B = Id$$

$$\textcircled{2} (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Verifica $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = \text{Id}^t = \text{Id}$

$\uparrow$
 $(MN)^t = N^t M^t$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = \text{Id}^t = \text{Id}.$$

Achtung!

$$(A+B)^{-1} \text{ NON } \hat{=} A^{-1} + B^{-1}$$

Tecniche di calcolo

→ Algoritmo di Gauss (OGGI)

→ Formula con Determinanti (PIÙ AVANTI)

Inversa via Gauss

Algoritmo

→ Voglio calcolare l'inversa di A

→ Scrivo $(A | \text{Id})$

→ Lavoro alla Gauss fino ad ottenere $(\text{Id} | B)$

→ Allora $B = A^{-1}$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 35 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 60 & 0 & 35 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{array} \right)$$

↑
 A^{-1}

Sarebbe opportuno fare la verifica moltiplicando.

Formula per il caso 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si verifica
moltiplicando

Perché funziona l'algoritmo strano

- ① Lavorare alla Gauss su una matrice A equivale a moltiplicare A a sinistra per una opportuna matrice R .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{copio } R_1 \\ \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ \leftarrow \text{copio } R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

Adesso copio le prime 2
e faccio $R_3 - 3R_1$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{copio la 1}^a \\ \rightsquigarrow \text{copio la 2}^a \\ \rightsquigarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

- ② Fare tanti passaggi alla Gauss, vuol dire moltiplicare tante volte a sinistra

$$A \rightsquigarrow R_1 A \rightsquigarrow R_2 R_1 A \rightsquigarrow \underbrace{R_n \dots R_2 R_1 A}_R \rightsquigarrow RA$$

ma questo è equivalente a moltiplicare una sola volta per il prodotto di tutte le R_i

- ③ Se moltiplico $R(A_1 | A_2) = (RA_1 | RA_2)$
↑
prodotto righe per colonne

- ④ Siamo partiti da $(A | Id)$ e lavorando abbiamo ottenuto

$$(RA | RID) = (RA | R)$$

↑
se qui c'è Id , allora $R = A^{-1}$ ☺
— o — o —

Matrice inversa e cambio di base

Esempio 1 Consideriamo la base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cc} (1, 2) & (1, 3) \\ \text{"} & \text{"} \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Scrivere le matrici di cambio di base

$$\text{canonica} \rightsquigarrow \{v_1, v_2\}$$

$$\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow \text{canonica}$$

La canonica è $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$.

Facile : $\{v_1, v_2\} \rightsquigarrow \text{canonica}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array}$$

↑ ↑
 v_1 v_2

Questa matrice prende in INPUT componenti rispetto alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce in OUTPUT componenti rispetto alla canonica

$$7v_1 - 3v_2 = 7(1,2) - 3(1,3) = (4,5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

Meno ovvio $\{e_1, e_2\} \rightarrow \{v_1, v_2\}$. La matrice richiesta è l'inversa della precedente!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ad-bc}}}{1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{dalla canonica alla strana}$$

Ad esempio: consideriamo il vettore $(7,8)$ e ci chiediamo chi sono le sue comp. rispetto alla v_1, v_2

1° modo: risolvo $av_1 + bv_2 = (7,8) \rightsquigarrow$ trovo a e b

2° modo: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

Verifica: $13v_1 - 6v_2 = 13(1,2) - 6(1,3) = (7,8) \quad \text{😊}$

— 0 — 0 —