

SOTTO SPAZI VETTORIALI

Due possibili descrizioni

→ con equazioni

→ come Span di opportuni vettori

Esempio 1 $V = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w, x-3w=0 \} \subseteq \mathbb{R}^4$

Verifica che si tratta di un sottospazio

- Somma $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$
 $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

È vero che la loro somma sta in V ?

$$x_1 + y_1 = z_1 + w_1$$

$$x_1 - 3w_1 = 0$$

$$x_2 + y_2 = z_2 + w_2$$

$$x_2 - 3w_2 = 0$$

Basta sommare

$$(x_1 + x_2) - 3(w_1 + w_2) = 0$$

- Prodotto $(x, y, z, w) \in V \Rightarrow (ax, ay, az, aw) \in V$

Anche qui basta moltip. le equazioni per a .

Voglio trovare una base di V . Risolvo il sistema!

$$\begin{cases} x + y - z - w = 0 \\ x - 3w = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Le variabili z e w sono libere

$$w = t, \quad z = s, \quad -y + z - 2w = 0 \leadsto y = z - 2w = s - 2t$$

$$x = -y + z + w = -s + 2t + s + t = 3t$$

$$(x, y, z, w) = (3t, s - 2t, s, t) = t(3, -2, 0, 1) + s(0, 1, 1, 0)$$

↑ VERIFICA! ↑

↑
se invece di 0
ci fosse stato 10,
non era un
s.sp.

Quindi posso dire che

$$V = \text{Span} \{ \underset{\substack{\uparrow \\ v_1}}{(3, -2, 0, 1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_2}}{(0, 1, 1, 0)} \} \leadsto \dim V = 2$$

liu. indep.

Esempio 2 Sia $W = \text{Span} \{ \underset{\substack{\uparrow \\ w_1}}{(1, 1, 1, 1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ w_2}}{(3, 0, 2, 1)} \}$

liu. indep.

$$\dim W = 2$$

Calcolare $W+V$ e $W \cap V$, dove V è quello di prima.

È ovvio dalla definizione che

$$W+V = \text{Span} \{ v_1, v_2, w_1, w_2 \}$$

Per sapere se sono una base, devo controllare la linear independence.

Per far questo impongo $av_1 + bv_2 + cw_1 + dw_2 = 0$ e risolvo

$$3a + c + 3d = 0$$

$$-2a + b + c = 0$$

$$b + c + 2d = 0$$

$$a + c + d = 0$$

Risolvere questo sistema è equivalente a mettere i 4 vettori come colonne di una matrice 4×4 e lavorare alla Gauss.

→ Se ogni riga/colonna ha il PIVOT, allora sono Liu. indep., quindi

$$\dim(V+W) = 4 \text{ e quindi } \dim(V \cap W) = 0$$

→ altrimenti NON sono Liu. indep., quindi $\dim(V+W) = 2 \text{ o } 3$ e di conseguenza l'intersezione

Ora dico che $\dim(V+W)$ NON è 2. Se lo fosse, allora $\dim(V \cap W) = 2$, quindi $V=W$, ma non è possibile perché $(1, 1, 1, 1) \notin V$.

Osserviamo che $w_2 \in V$ (verifica le equazioni!), quindi

$V \cap W$ ha dimensione 1, quindi $W+V$ ha dim 3

$$W+V = \text{Span} \{ (3, 0, 2, 1) \}$$

↑ sta in entrambi

Esempio 3 $X = \text{matrici } 2 \times 2$.

$$V = \left\{ A \in X : A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right\} = \text{matrici } 2 \times 2 \text{ che commutano con } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow B \qquad \qquad \uparrow B$

Verifichiamo che è un s.sp.

• Somma Se $A_1 \in V$ e $A_2 \in V$, è vero che $A_1 + A_2 \in V$?

$$A_1 B = B A_1$$

$$A_2 B = B A_2$$

$\leadsto$ sommando

$$(A_1 + A_2) B = B (A_1 + A_2)$$

$$\downarrow \\ A_1 + A_2 \in V$$

Stessa cosa per il prodotto

Calcolare la dimensione e trovare una base di V

Super-bovino. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condizione data diventa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 2a+c & \leadsto c=0 \\ a+b = 2b+d & \leadsto a-b-d=0 \\ 2c = c & \leadsto c=0 \\ c+d = d & \leadsto c=0 \end{cases}$$

La soluzione generale è

$$b=t, d=s, c=0, a=t+s$$

$$(a, b, c, d) = (t+s, t, 0, s) = t(1, 1, 0, 0) + s(1, 0, 0, 1)$$

$\uparrow$ base $\qquad \qquad \uparrow$

Tornando, alle matrici, una base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \text{quindi } \dim V = 2$$

Esempio 4 $X = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ^{derivate}

$$V = \{ p(x) \in X : p(2) = 0 \text{ e } p'(3) = 0 \}$$

^{è importante che sia 0}

Verificare per esercizio che V è un s.sp. di X .

Trovare $\dim(V)$ e una base.

Bovinamente

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \rightsquigarrow \text{sostituisco } x=2$$
$$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \rightsquigarrow \text{sostituisco } x=3$$

Le condizioni diventano

$$\begin{cases} a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ b + 6c + 27d = 0 \end{cases}$$

Sistema già a scala, con c e d variabili libere

$$d = t, c = s, b = -6s - 27t, a = -2b - 4c - 8d$$
$$= 12s + 54t - 4s - 8t = 8s + 46t$$

$$(a, b, c, d) = (8s + 46t, -6s - 27t, s, t)$$
$$= t(46, -27, 0, 1) + s(8, -6, 1, 0)$$

[↑] [↑]
lin. indep.

Una base di V (che ha $\dim = 2$) è

$$V = \text{Span}(46 - 27x + x^3, 8 - 6x + x^2)$$

Esiste una base di V in cui tutti gli elementi hanno grado ≤ 3 ?
" " " " " " < 3 ?

1^a Risposta: SÌ! basta sostituire il 2° con la somma dei due !!

2^a Risposta: NO! Se esistesse, tutti gli el. di V avrebbero grado < 3
e questo è falso perché ne abbiamo trovato 1.

— 0 — 0 —