

Sistemi lineari

Interpretazione con le matrici

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

colonna lunga n

matrice $m \times n$

equ. $\uparrow$ inc. $\uparrow$

colonna lunga m

Il sistema è omogeneo quando $\vec{b} = \vec{0}$.

Esempio

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sistema OMogeneo

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1ª interpretazione

Stiamo cercando una comb. lin. delle colonne della matrice dei coeff. che faccia 0.

→ La soluzione $x = y = z = 0$ c'è sempre

→ Ci sono altre soluzioni se e solo se le colonne sono LIN. DIPEND.

Se il sistema è NON OMOG, allora stiamo cercando di scrivere la colonna dei termini noti come comb. lin. delle colonne dei coeff., quindi ci riusciamo se e solo se la colonna dei termini noti è nello span delle colonne dei coeff.

2ª interpretazione

Pensiamo alle 3 equ. del sistema come una applic. lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

In questa luce

→ risolvere il sistema omogeneo vuol dire trovare $\text{Ker}(L)$.

Sappiamo che il Ker è uno sp. vettoriale, quindi i suoi elementi sono comb. lineari dei vettori di una base.

I parametri da cui la soluz. dipende sono i coeff. di questa combinazione.

→ Risolvere un sistema non omogeneo vuol dire trovare i vettori (x, y, z) nello spazio di partenza che vengono mandati da L nel vettore b dei termini noti.

Questo è possibile se e solo $b \in \text{Im}(L)$.

Oss. Consideriamo un sistema non omogeneo $n \times n$ (quadrato)
Una applic. $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surgettiva

Questo dice che

il sistema ha soluzione per ogni scelta dei termini noti b

$\Leftrightarrow$ il sistema con $b=0$ ha come unica soluzione quella con tutti 0

$\Leftrightarrow$ la matrice dei coeff. lavorata alla Gauss diventa una scala con un Pivot in ogni riga e colonna.

— 0 — 0 —

Struttura generale delle soluzioni di un sistema

Consideriamo un sistema generale $Ax = b$.

La soluzione generale si presenta nella forma

$$x = x_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

↑
soluzione
qualsiasi del
sistema dato
 $Ax = b$

↑
 k parametri liberi

↑
vettori che costituiscono una base
delle soluz. del corrisp. sistema omogeneo
 $Ax = 0$

Dim. Ci sono due cose da dimostrare.

1ª cosa Se x_0 risolve il sistema NON omogeneo e v risolve quello omogeneo, allora $x_0 + v$ risolve quello NON omog.

$$Ax_0 = b$$

$$Av = 0$$

$$\text{Sommando } A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$$

2ª cosa Se x_0 e x risolvono entrambi il sistema NON omog., allora $x_0 - x$ risolve quello omogeneo

$$Ax_0 = b$$

$$Ax = b$$

$$\text{Facendo la diff. } \therefore A(x_0 - x) = b - b = 0.$$

Esempio

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = a \end{cases}$$

Studiare, al variare di a , le soluzioni del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & a \end{array} \right) \xrightarrow[2R_3 - 3R_1]{2R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2a - 6 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 10 \end{array} \right)$$

MANCA UN
PIVOT

Se $2a - 10 \neq 0$, cioè se $a \neq 5$,
allora NON CI SONO SOLUZIONI.

Se $a = 5$, allora restano solo le
prime 2 equ., e la z la possiamo
usare come variabile libera

$$z = t, \quad 3y + z = 4, \quad 3y = 4 - t \rightsquigarrow y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t$$

$$2x - y + z = 2 \rightsquigarrow 2x = 2 + y - z = 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t - t = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}t$$

Soluz. generale

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t, t \right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right)} + t \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x_0}$
 $\uparrow$ param. libero
 $\uparrow$ v_1

Ora x_0 deve risolvere il sistema non omogeneo $Ax_0 = b \rightarrow \text{VERIFICA}$

v_1 deve risolvere il sistema OMOGENEO $Av_1 = 0 \rightarrow \text{VERIFICA}$

Oss. Posso permettermi di levare le frazioni su v_1 e scrivere la soluzione come

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right) + t (-2, -1, 3)$$

$$= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right) + t (2, 1, -3)$$

$\uparrow$
 Questo NON si
 può cambiare, o per lo
 meno non lo posso
 moltiplicare per dei numeri

$\uparrow$ continua a risolvere
 $Av = 0$

Esempio

$$x + 2y - 3z = 5$$

$$\textcircled{1} \quad 2 \quad -3 \mid 5$$

Posso usare y e z come variabili libere.

$$z = t, \quad y = s, \quad x = 5 - 2y + 3z = 5 - 2s + 3t$$

Soluzione generale:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (5 - 2s + 3t, s, t) \\ &= (5, 0, 0) + t(3, 0, 1) + s(-2, 1, 0) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 x_0
 $\uparrow$
 $Ax_0 = b$

$\uparrow$
 v_1
 $Av_1 = 0$

$\uparrow$
 v_2
 $Av_2 = 0$

Altro modo corretto

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + t(2, -1, 0) + s(1, 1, 1)$$

$\uparrow$
 $Ax_0 = b$

$\uparrow$
 $Av_1 = 0$
 (è il vecchio
 v_2 cambiato di
 segno)

$\uparrow$
 $Av_2 = 0$
 (è la somma
 dei vecchi v_1 e v_2)

— o — o —