

KER E IMMAGINE

Def. Siano V e W sp. vett., e sia $f: V \rightarrow W$ lineare

- Si definisce $\text{Ker}(f)$ (kernel, nucleo) l'insieme

$$\text{ker}(f) = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ di } W\} \subseteq V$$

- Si definisce $\text{Im}(f)$ (immagine) l'insieme

$$\text{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\} \subseteq W$$

Prop. Nelle ipotesi di sopra

- $\text{Ker}(f)$ è un s.sp. vett. di V
- $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W .

Dim per $\text{ker}(f)$

- Somma. Se $v_1 \in \text{ker}(f)$ e $v_2 \in \text{ker}(f)$, allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$$

$$\leadsto v_1 + v_2 \in \text{ker}(f)$$

- Prodotto per un numero. Se $v \in \text{ker}(f)$ e $a \in K$, allora

$$f(av) = a f(v) = a \cdot 0 = 0 \quad \leadsto av \in \text{ker}(f)$$

Dim per $\text{Im}(f)$

Siano $w_1 \in \text{Im}(f)$ e $w_2 \in \text{Im}(f)$, cioè
 $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$. Allora $w_1 + w_2 = f(v_1 + v_2) \in \text{Im}(f)$

Analogamente

$$af(v) = f(av) \in \text{Im}(f)$$

— 0 — 0 —

KER E INIETTIVITÀ $f: V \rightarrow W$ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

Dim. $\Rightarrow$ Se f è iniettiva, allora $f(0) = 0$ e non ci sono altri $v \in V$ t.c. $f(v) = 0$.

$$[\underset{\substack{\uparrow \\ \in V}}{f(0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{f(0 \cdot v)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{0 \cdot f(v)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \in W}}{0}]$$

$\Leftarrow$ Supponiamo che $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$ e $f(v_1) = f(v_2)$. Allora per linearità

$$f(v_1 - v_2) = 0$$

Ma allora $v_1 - v_2 \in \ker(f)$.

Se $\ker(f) = \{0\}$, allora $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$, cioè non abbiamo violazioni di iniettività.

IMMAGINE E SURGETTIVITÀ f è surgettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = W$

Sostanzialmente è la definizione di funzione surgettiva.

— 0 — 0 —

Teorema (RANK-NULLITY) Sia $f: V \rightarrow W$ lineare, con V e W sp. vett. di dim. finita.

Allora

sp. di partenza

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim V$$

Dim. Indichiamo con n la dimensione di V , e con k la dimensione di $\ker(f)$.

Ovviamente $k \leq n$ perché $\ker(f) \subseteq V$.

Prendiamo $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $\ker(f)$.

Questi sono lin. indip. in V , quindi posso completarli ad una base di V aggiungendo $n-k$ vettori

$$v_{k+1}, \dots, v_n$$

Claim: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono una base di $\text{Im}(f)$.

Se lo faccio ho finito perché avrei

$$k + (n-k) = n$$

- Sono generatori Ogni elemento $w \in \text{Im}(f)$ si scrive come

$$w = f(v) = f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n)$$

$\uparrow$
base di V

$$= c_1 \underbrace{f(v_1)}_0 + \dots + c_k \underbrace{f(v_k)}_0 + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n)$$

$\leadsto w$ è comb. lineare degli el. $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$.

- Sono lin. indep. Scriviamo una loro comb. lin. nulla

$$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$

$\parallel$

$$f(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = 0$$

$\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \text{Ker}(f)$, ma allora

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$\uparrow$ base del $\text{Ker}(f)$

Se porto tutto a sx, ottengo una comb. lin. di $v_k, \dots, v_n$ che fa 0, ma essendo una base di V tutti i coeff. sono nulli, ed in particolare sono nulli quelli che volevo

$$a_{k+1} = \dots = a_n = 0.$$

— 0 — 0 —

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim V$$

Conseguenza 1 Supponiamo $\dim V > \dim W$.

Allora φ **NON PUÒ ESSERE INIETTIVA**

Dim. Se fosse iniettiva, allora $\ker(\varphi) = \{0\}$, quindi $\dim \ker = 0$, quindi

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leq \dim W < \dim V$$

$\uparrow$ $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq W$ $\uparrow$ ipotesi

$\uparrow$ [Corretto dopo video :)]

Conseguenza 2 Supponiamo $\dim V < \dim W$

Allora φ **NON PUÒ ESSERE SURGETTIVA**

Dim. Se fosse surgettiva, allora $\operatorname{Im}(\varphi) = W$, quindi $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim W$ e allora

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi))$$

$$= \dim W + \dim(\ker(\varphi))$$

$$\dim(\ker) \geq 0 \rightarrow \geq \dim W$$

$$> \dim V$$

$\uparrow$ ipotesi

e questo è assurdo

Conseguenza 3 Se $\dim(V) = \dim(W)$, allora

φ è INIETTIVA $\Leftrightarrow \varphi$ è SURGETTIVA

Dim. $\Rightarrow$ Se φ è iniettiva, allora $\dim(\ker(\varphi)) = 0$, quindi

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim V = \dim W$$

$\uparrow$ rank-nullity

$\uparrow$ ipotesi

Quindi $\text{Im}(f)$ è un s.sp. di W che ha la stessa dim. di W , quindi $\text{Im}(f) = W$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se f è surgettiva, allora $\text{Im}(f) = W$ e nel teorema

$$\begin{array}{ccc} \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) & = & \dim V \\ \text{coincide con} \rightarrow \parallel & & \parallel \text{ (per ipotesi)} \\ \dim W & & \dim W \end{array}$$

Ma allora $\dim(\ker(f)) = 0 \rightsquigarrow \ker(f) = \{0\}$
 $\rightsquigarrow f$ è iniettiva.

— o — o —

Esempio 1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che
 $f(1,1) = (2,3)$ e $f(4,5) = (6,7)$
È iniettiva? È surgettiva?

Intanto esiste ed è unica (ko. struttura + $\{(1,1), (4,5)\}$ base)
L'immagine di f contiene almeno i vettori $(2,3)$ e $(6,7)$.
Questi sono lin. indep., quindi per forza $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$,
ma più di 2 non può essere. Dunque $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ e f è
surgettiva. Le dim. in partenza ed arrivo sono uguali, quindi è
pure iniettiva.

Esempio 2 Se $f: \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{13}$, quanto può valere $\dim(\ker(f))$?

$$\begin{array}{ccc} \dim(\ker) + \dim(\text{Im}) & = & 20 \\ \uparrow & & \\ \text{da 0 a 13} & & \end{array}$$

Quindi $7 \leq \dim(\ker) \leq 20$. Fare esempi in cui si
realizzano i casi intermedi

— o — o —