

Esempio ① Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$f(1,1,0) = (2,1)$$

$$f(0,1,0) = (0,3)$$

$$f(0,2,1) = (1,-1)$$

② Calcolare $f(1,1,1)$

③ Scrivere la matrice associata ad f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche

④ Scrivere la stessa matrice usando le basi

$$\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \quad \{(1,1), (1,-1)\}$$

Per il punto ① basta dimostrare che i vettori in cui ho assegnato f sono una base di $\mathbb{R}^3$. Essendo in numero giusto, basta verificare che sono lin. indip.

$$a(1,1,0) + b(0,1,0) + c(0,2,1) = (0,0,0)$$

$$(a, a+b+2c, c) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a = 0 & 1^a \text{ eq} \Rightarrow a=0 \\ a+b+2c=0 & 3^a \text{ eq} \Rightarrow c=0 \\ c = 0 & 2^a \text{ eq} \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Le colonne sono
i 3 vettori dati

Sono una base. Per il teo. di struttura f esiste ed è unica.

② Come calcolo $f(1,1,1)$? Lo scrivo come comb. lin. dei 3 vettori dati (Stesso sistema di prima con $= (1,1,1)$)

$$\begin{cases} a = 1 & a=1 \\ a+b+2c = 1 & b=-2 \\ c = 1 & c=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= 4 \cdot f(1,1,0) - 2 \cdot f(0,1,0) + 1 \cdot f(0,2,1) \\ &= (2,1) - 2(0,3) + (1,-1) = (3,-6) \end{aligned}$$

③ Devo calcolare con un po' di pazienza

$$f(1,0,0) = f(1,1,0) - f(0,1,0) = (2,1) - (0,3) = (2,-2)$$

$$f(0,1,0) = (0,3) \quad \leftarrow \text{dato all'inizio}$$

$$f(0,0,1) = f(0,2,1) - 2 \cdot f(0,1,0) = (1,-1) - 2(0,3) = (1,-7)$$

Dal momento che anche in arrivo abbiamo la base canonica

$$f(1,0,0) = (2,-2) = \boxed{2}(1,0) + \boxed{-2}(0,1)$$

$$f(0,1,0) = (0,3) = \boxed{0}(1,0) + \boxed{3}(0,1)$$

$$f(0,0,1) = (1,-7) = \boxed{1}(1,0) + \boxed{-7}(0,1)$$

I sei numeri ottenuti sono le colonne della matrice richiesta

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & \boxed{3} & \boxed{-7} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{dim. sp. arrivo} \\ \leftarrow \text{dim. sp. partenza} \end{array}$$

Back to ②. Calcoliamo in altro modo $f(1,1,1)$.

Basta moltiplicare la matrice per il vettore

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{😊}$$

④ Ora devo usare le basi

$$\begin{array}{ccccc} \{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) \} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \{ (1,1), (1,-1) \} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ w_1 \quad w_2 \end{array}$$

$$f(v_1) = f(1,0,0) = (2,-2) = \boxed{0} \omega_1 + \boxed{2} \omega_2$$

↑
prima

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) \\ &= (2,-2) + (0,3) \\ &= (2,1) = a(1,1) + b(1,-1) = \boxed{\frac{3}{2}} \omega_1 + \boxed{\frac{1}{2}} \omega_2 \end{aligned}$$

Questo mi porta al sistema

$$\begin{aligned} a+b &= 2 & \text{sommando: } 2a &= 3 \quad \leadsto a = \frac{3}{2} \\ a-b &= 1 & & \leadsto b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_3) &= f(1,1,1) = f(1,1,0) + f(0,0,1) \\ &= (2,1) + (1,-7) \\ &= (3,-6) = a(1,1) + b(1,-1) = \boxed{-\frac{3}{2}} \omega_1 + \boxed{\frac{9}{2}} \omega_2 \end{aligned}$$

Da cui il sistema

$$\begin{aligned} a+b &= 3 & \text{sommando: } 2a &= -3 \quad \leadsto a = -\frac{3}{2} \\ a-b &= -6 & & \leadsto b = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Quindi la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \omega_1 \\ \leftarrow \omega_2 \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑
 $f(v_1)$ $f(v_2)$ $f(v_3)$

— 0 — 0 —

FILOSOFIA GENERALE

- Quando in uno sp. vett. fissiamo una base, i vettori diventano numeri
- Quando fissiamo basi in partenza ed arrivo, le applic. lineari diventano MATRICI
- A quel punto possiamo calcolare le applic. usando le matrici

$$f(v) = w$$

$$A x = y \quad \leftarrow \text{comp. di } f(v) \text{ rispetto ad una base di } W$$

↑ ↑
matrice di f comp. di v rispetto ad una base di V

↑ quelle usate per costruire A .

MATRICE DI CAMBIO DI BASE

Sia V uno sp. vett. di dim. finita n .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ un'altra base di V .

Se di un vettore v conosco le componenti rispetto alla prima base, come calcolo le componenti rispetto alla seconda base?

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $\{ \underset{v_1}{(1,1)}, \underset{v_2}{(0,1)} \}$ $\{ \underset{\hat{v}_1}{(2,1)}, \underset{\hat{v}_2}{(-1,1)} \}$

Se v ha componenti $(3,4)$ rispetto alla prima base, allora

$$v = 3v_1 + 4v_2 = (3,7) = a(2,1) + b(-1,1)$$

Risolvendo trovo a e b e quelle sono le comp. risp. seconda base.

Matrice di cambio di base

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \hat{v}_1 \\ \leftarrow \hat{v}_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$

Scrivo v_1 usando la seconda base: le componenti sono la 1^a colonna

Scrivo v_2 usando la seconda base: le componenti sono la 2^a colonna

$$(1,1) = a(2,1) + b(-1,1)$$

$$2a - b = 1$$

$$a + b = 1$$

Sommando $a = \boxed{\frac{2}{3}}$
 $b = \boxed{\frac{1}{3}}$

$$(0,1) = a(2,1) + b(-1,1)$$

$$2a - b = 0$$

$$a + b = 1$$

sommando $a = \boxed{\frac{1}{3}}$
 $b = \boxed{\frac{2}{3}}$

La matrice di cambio di base è $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = M$

Qual è l'utilità di M ?

M prende in INPUT componenti rispetto alla prima base
e restituisce in OUTPUT " " " seconda base

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Consideriamo $5 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (5, 6)$

Consideriamo $\frac{11}{3} \hat{v}_1 + \frac{7}{3} \hat{v}_2 = \frac{11}{3} (2, 1) + \frac{7}{3} (-1, 1) = (5, 6)$

— 0 — 0 —