

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W sp. vett. Un'applicazione lineare è una funzione $f: V \rightarrow W$ con queste due proprietà

$$(i) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \text{ per ogni } v_1 \in V \text{ e ogni } v_2 \in V$$

$$(ii) \quad f(av) = af(v) \text{ per ogni } v \in V \text{ e ogni } a \in \mathbb{K}.$$

Oss. Nella (i) il $+$ a sx è la somma in V , quello a dx è la somma in W

Stessa cosa per il prodotto nella (ii).

Esempio classico a cui pensare: la derivata è un'applic. lineare, cioè

→ la derivata della somma è la somma delle derivate

→ "le costanti escono fuori"

Oss. Se f è lineare, allora "le combinazioni lineari escono fuori", cioè

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = c_1 f(v_1) + \dots + c_m f(v_m)$$

Usando la (i) n volte e poi la (ii) otteniamo

$$\begin{aligned} f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) &\stackrel{(i)}{=} f(c_1 v_1) + \dots + f(c_m v_m) \\ &\stackrel{(ii)}{=} c_1 f(v_1) + \dots + c_m f(v_m). \end{aligned}$$

Teorema di struttura Sia V e W sp. vett. di dim. finita.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ vettori qualunque di W (sono tanti quanti la dim. di V)

Allora esiste un'unica applic. lin. $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Brutalmente: posso mandare una base dove mi pare e questo mi determina univocamente l'applicazione.

Dim. Dove va a finire un qualunque $v \in V$?

Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ (posso in modo unico perché sono base) e pongo

$$f(v) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n.$$

In questo modo definisco $f(v)$ per ogni $v \in V$.

Sono sicuro che sia lineare? Due verifiche.

• Somma $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in V$

$$\hat{v} = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n \in V$$

$$v + \hat{v} = (c_1 + \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n + \hat{c}_n) v_n$$

Applico la def.

$$f(v) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$

$$f(\hat{v}) = \hat{c}_1 w_1 + \dots + \hat{c}_n w_n$$

$$f(v + \hat{v}) = (c_1 + \hat{c}_1) w_1 + \dots + (c_n + \hat{c}_n) w_n$$

Da queste formule segue che $f(v + \hat{v}) = f(v) + f(\hat{v})$.

• Prodotto per costante

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$a v = \underline{a c_1} v_1 + \dots + \underline{a c_n} v_n$$

$$f(v) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$

$$f(av) = a c_1 w_1 + \dots + a c_n w_n$$

Da queste due formule segue che

$$f(av) = a f(v)$$

— o — o —

Esempio 1 Come sono fatte tutte le applic. lin. $f: \underset{\substack{\text{"} \\ \vee}}{\mathbb{R}} \rightarrow \underset{\substack{\text{"} \\ \wedge}}{\mathbb{R}} ?$

Chiamo $a = f(1)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ avremo che

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$$

Quindi sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = ax$

Esempio 2 Stessa cosa con $f: \underset{\substack{\text{"} \\ \vee}}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underset{\substack{\text{"} \\ \wedge}}{\mathbb{R}} ?$

Chiamo $a = f((1,0))$ e $b = f((0,1))$. A questo punto

$$\begin{aligned} f((x,y)) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= x f((1,0)) + y f((0,1)) \\ &= ax + by \end{aligned}$$

$$f(x,y) = ax + by$$

Esempio 3 Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che $f(1,1) = (2,3,4)$ e $f(1,2) = (7,0,2)$. Calcolare quindi $f(2,3)$.

Osservo che $(1,1)$ e $(1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ (spazio di partenza) (sono in numero giusto e sono lin. indip.)

Il teorema di struttura dice che possiamo mandare una base dove ci pare.

Come calcolo $f(2,3)$? lo scrivo come comb. lin. degli el. della base

$$(2,3) = (1,1) + (1,2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} f((2,3)) &= f((1,1) + (1,2)) = f(1,1) + f(1,2) \\ &= (2,3,4) + (7,0,2) = (9,3,6). \end{aligned}$$

Se avessi chiesto $f(5,14)$, dovevo risolvere

$(5,14) = a(1,1) + b(1,2)$ e poi calcolare

$$f(5,14) = a(2,3,4) + b(7,0,2)$$

— o — o —

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W sp. vett. di dim. finita.

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V .

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di W .

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applic. lineare.

Costruiamo una matrice $A \in M_{m \times n}$ (# righe = dim. sp. arrivo
colonne = dim. sp. partenza)

$$\text{Prendo } f(v_1) = \boxed{a_{1,1}}w_1 + \boxed{a_{2,1}}w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}}w_m$$

↑ ↑ ↑
prima colonna della matrice A

$$\text{Prendo } f(v_2) = \boxed{a_{1,2}}w_1 + \boxed{a_{2,2}}w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}}w_m$$

↑ ↑ ↑
seconda colonna della matrice A

⋮

Proseguo allo stesso modo fino a $f(v_m)$, i cui coeff. andranno nell'ultima colonna.

BATTAGLIA NAVALE

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \vdots \\ \leftarrow w_m \end{array}$$

↑ ↑ ⋮ ↑
 $f(v_1)$ $f(v_2)$ $f(v_m)$

Oss. Se cambio le basi in partenza ed arrivo, la matrice cambia.

Esempio Consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da
 $f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$

Calcolare $f(2, 1) = (5, 5)$ (basta sostituire)

Scrivere la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base
 $\{(1, 1), (0, 1)\} \leftarrow$ base di $\mathbb{R}^2$
 $\begin{matrix} \text{"} \\ v_1 \\ w_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{"} \\ v_2 \\ w_2 \end{matrix}$

$$f(v_1) = (3, 4) = \boxed{3} w_1 + \boxed{1} w_2$$

$\uparrow$ uso formula $\uparrow$ 1ª colonna $\uparrow$

$$f(v_2) = (1, 3) = \boxed{1} w_1 + \boxed{2} w_2$$

$\uparrow$ 2ª colonna $\uparrow$

La matrice è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow w_1 \\ \rightarrow w_2 \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2)$

Se cambiamo la base in partenza e/o in arrivo, cambia la matrice.
Ad esempio, se usavo $(1, 0), (0, 1)$ in partenza ed arrivo

$$f(1, 0) = (2, 1) = \boxed{2}(1, 0) + \boxed{1}(0, 1) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(0, 1) = (1, 3) = \boxed{1}(1, 0) + \boxed{3}(0, 1)$$

— 0 — 0 —