

Lemma di sostituzione Sia V uno sp. vett.

Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ vett. lin. indip. in V

Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori di V .

Allora

(1) $m \leq n$

(2) A meno di permutare i numeri, possiamo sostituire $w_1, \dots, w_m$ con $v_1, \dots, v_m$ in modo che

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

siano ancora generatori di V .

Dim Dimostrazione per induzione su m .

Caso $m=1$ C'è solo v_1 e quindi è quasi ovvio che $1 \leq n$.

Devo mostrare che posso sostituire v_1 ad uno dei w_i .

Posso scrivere

$$v_1 = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \leftarrow \text{questi sono generatori}$$

Almeno uno dei c_i è $\neq 0$. Supponiamo che $c_1 \neq 0$. Allora

"posso scrivere w_1 come comb. lin. del resto

$$w_1 = \frac{1}{c_1} (v_1 - c_2 w_2 - \dots - c_n w_n)$$

ma allora, per il lemma di eliminazione,

$$V = \text{Span}(w_1, \dots, w_n) = \text{Span}(v_1, w_1, \dots, w_n) = \text{Span}(v_1, w_2, \dots, w_n)$$

$\uparrow$ sono generatori $\uparrow$ posso eliminare v_1 $\uparrow$ posso eliminare w_1

e questo mostra che $v_1, w_2, \dots, w_n$ sono ancora generatori.

Passo induttivo: $m \Rightarrow m+1$ Supponiamo che la tesi sia vera per un certo m .

Consideriamo ora $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ lin. indep.

Anche il primo blocco da m è lin. indep. (perché?), quindi per ipotesi $m \leq n$ e posso sostituire ottenendo nuovi generatori

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

Ora voglio sostituire v_{m+1} ad uno dei w_i rimasti. Ma ce sono rimasti? Sì, altrimenti $v_1, \dots, v_m$ sarebbero generatori, quindi

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

e portando tutto a dx o sx avrei violato la lin. indep. dei v_i .

Quindi per lo meno $m+1 \leq n$.

Per fare l'ultima sostituzione, scrivo v_{m+1} come

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + \underbrace{a_{m+1} w_{m+1} + \dots + a_n w_n}_{\text{combinazione lineare di } w_i}$$

e osservo che per forza almeno uno degli ultimi a_i è $\neq 0$.

A meno di cambiare i numeri supponiamo che $a_{m+1} \neq 0$.

In questo caso posso scrivere w_{m+1} come comb. lin. di tutto il resto, semplicemente "ricavando".

Concludo con il lemma di eliminazione

sous gen.

$$V = \text{Span}(v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

↗ elimino v_{m+1} che è comb. lin. degli altri

$$= \text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

↘ elimino w_{m+1} che è comb. lin. degli altri.

$$= \text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n)$$

il che completa la sostituzione.

— o — o —

Conseguenza 1 Sia V sp. vett. di dimensione finita.

Siano $v_1, \dots, v_m$ vett. lin. indip.

Allora esiste una base di V che contiene $v_1, \dots, v_m$ (base ottenuta aggiungendo)

Dim. Sappiamo già che V ammette una base $\{w_1, \dots, w_n\}$

Questi sono in particolare generatori, quindi $n \geq m$ e posso rinumerare in maniera tale che, dopo aver sostituito,

$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$

siano ancora generatori, quindi una base, come stiamo per vedere.

Conseguenza 2 Sia V uno sp. vett. di dim. n .

Siano $w_1, \dots, w_m$ dei generatori. (Il loro numero è lo stesso della dimensione)

Allora per forza sono pure una base (quindi sono pure lin. indip.)

Dim. Se non fossero una base, potrei ottenere una base eliminando qualcuno, ma tutte le basi devono avere n elementi.

Conseguenza 3 Sia V uno sp. vett. di dim. n .

Siano $v_1, \dots, v_n$ vett. lin. indip. (il loro numero = dim.)

Allora sono per forza una base (e quindi pure generatori)

Dim. Se non fossero una base, potrei ottenere una base aggiungendo ulteriori elementi, ma questa base avrebbe di n elementi.

Morale Se voglio sapere se n vettori sono una base in uno sp. di dim n , basta fare una delle 2 verifiche

→ che sono lin. indip.

→ che sono generatori.

Esempi [1] $(1,0,1)$ e $(0,3,4)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?
No! Sono troppo pochi?

[2] Sono lin. indep.?

Sì! Altrimenti sarebbero uno multiplo dell'altro, e non è vero.

Più brevemente $a(1,0,1) + b(0,3,4) = (0,0,0)$

$$a = 0$$

$$3b = 0 \quad \leadsto \quad a = b = 0 \quad \ddot{\smile}$$

$$a + 4b = 0$$

[3] Completiamoli in modo da ottenere una base

$(1,0,1), (0,3,4), (0,0,1)$

Saranno una base?

Essendo in numero giusto, basta verificare la lin. indep.

$$a(1,0,1) + b(0,3,4) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$a = 0 \quad \leadsto \quad a = 0$$

$$3b = 0 \quad \leadsto \quad b = 0 \quad \text{☺}$$

$$a + 4b + c = 0 \quad \leadsto \quad c = 0$$

[4] Calcolare le componenti di $(1,1,1)$ rispetto a questa base.

$$a(1,0,1) + b(0,3,4) + c(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$a = 1$$

$$3b = 1 \quad \leadsto \text{risolvo e ho finito}$$

$$a + 4b + c = 1$$

⑤ $(1,0,1)$, $(0,3,4)$, $(1,3,5)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?
 $\underbrace{\quad}_{v_1} \quad \underbrace{\quad}_{v_2} \quad \underbrace{\quad}_{v_3}$

No, perché $v_3 = v_1 + v_2$, quindi no lin. indep. ($v_1 + v_2 - v_3 = 0$)

Esempi Consideriamo $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

① $x, x+2, x^3+1$ sono una base di V ?

No! $\dim(V) = 4$ e loro sono solo 3. Si vede anche a occhio che x^2 non è comb. lineare di loro 3.

② $x, x+2, x^3+1, x^2-3x$ sono una base di V ?

Basta verificare la lin. indep.

$$ax + b(x+2) + c(x^3+1) + d(x^2-3x) = 0$$

$\uparrow$ polinomio nullo

$$cx^3 + dx^2 + (b-3d+a)x + (c+2b) = 0$$

$$c = 0$$

$$\leadsto c = 0$$

$$d = 0$$

$$\leadsto d = 0$$

$$\leadsto a=b=c=d=0 \quad \ddot{\smile}$$

$$b-3d+a=0$$

$$c+2b=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}$$

— 0 — 0 —