

ESISTENZA DI BASI

Def Diciamo che uno sp. vett. V ha DIMENSIONE FINITA se ammette un numero finito di generatori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$

Esempi

[1] $\mathbb{R}^3$ ha dim. finita. Un possibile insieme di generatori è

$$(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

Questi sono anche una base.

[2] $M_{2 \times 3}$ ha dim. finita. Possibili generatori sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questi si verifica che sono una base (la base canonica)

[3] $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ha dim. finita. Possibili generatori sono

$$1, x, x^2 \quad \rightsquigarrow \text{base canonica}$$

Oss. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$
 $1, x, x^2, x^2+2x, x-7$ sono ancora generatori, ma di sicuro non sono lin. indep.

$$\vec{v}_4 = \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2, \text{ quindi } 0 \cdot \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 1 \cdot \vec{v}_3 - 1 \cdot \vec{v}_4 - 0 \cdot \vec{v}_5 = \vec{0}$$

La comb. lin. fa $\vec{0}$ anche se ci sono coeff. $\neq 0$.

4 $\mathbb{R}[x]$ NON ha dimensione finita

Se avesse un numero finito di generatori, questi avrebbero un grado max, e tutti i pol. di grado più alto non si potrebbero ottenere come comb. lin. di questi generatori.

Teorema (Proprietà delle basi)

Sia V uno sp. vett. di dim. finita (cioè numero finito di generatori)

Allora valgono i seguenti fatti

- ① Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono generatori, allora posso eliminarne alcuni in modo che quelli che rimangono siano una base
(base ottenuta per eliminazione)
- ② Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono lin. indip., allora posso aggiungere dei vettori in modo da ottenere una base
(base ottenuta per aggiunta)
- ③ Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.
Tale numero lo chiamiamo DIMENSIONE dello spazio.

La dimostrazione utilizza due lemmi

Lemma di eliminazione Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ elementi di V .

Supponiamo che $\vec{v}_1$ sia comb. lin. degli altri, cioè

$$\vec{v}_1 = a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_m \vec{v}_m$$

Allora $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$

(Brutalmente: $\vec{v}_1$ non aggiunge nulla di nuovo rispetto a $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$, quindi lo posso eliminare).

Lemma di sostituzione Sia $\forall$ uno sp. vett.

Siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ vettori lin. indep.

Siano $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ dei generatori.

Allora

(1) $m \leq n$

(2) Posso sostituire m dei w con gli m v ottenendo ancora dei generatori

Dim. lemma di eliminazione È ovvio che

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \supseteq \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

(semplicemente basta mettere 0 come coeff. di $\vec{v}_1$)

La cosa non ovvia è che

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \subseteq \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

Prendo $\vec{v}$ che sta nello span a sx

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_m \quad \text{sost. } \vec{v}_1 \text{ usando ipotesi}$$

$$= c_1 (a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_m \vec{v}_m) + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_m$$

$$= (c_1 a_2 + c_2) \vec{v}_2 + \dots + (c_1 a_m + c_m) \vec{v}_m$$

Questo mostra che $\vec{v} \in \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$

Dim Teorema

① Come ottenere la base per eliminazione. Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ dei generatori. Considero tutti i possibili sottoinsiemi. Alcuni sottoinsiemi saranno ancora generatori, altri no.

Tra tutti quelli che sono ancora generatori, scelgo quello (o uno di quelli) con il minor numero di elementi.

Dico che quelli sono una base. Generatori lo sono.

Indichiamo i rimasti con $\{v_1, \dots, v_m\}$. Supponiamo che essi siano lin. indip. Allora esistono $c_1, \dots, c_m$ non tutti nulli, tali che

$$C_1 \vec{v}_1 + \dots + C_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

Mettiamo $c_i \neq 0$. Allora posso ricavare $\vec{v}_3$ in funzione degli altri

$$\vec{G}_1 = - \frac{C_2}{C_1} \vec{G}_2 - \dots - \frac{C_m}{C_1} \vec{G}_m$$

Ma allora $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lemma elim.}}}{=} \text{Span}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$

Ma allora $\{\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ sono ancora generatori e sono meno dei precedenti!

③ Siauo $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ e $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ due basi.

Allora i primi sono lin. indip. e i secondi sono generatori.

Per il lemma di sostituzione sappiamo che $m \leq n$.

Invertendo il discorso

i secondi sono lin. indep. e i primi sono generati.

Per il lemma di sostituzione sappiamo $n \leq m$

Quindi $n = m$.

② Come ottenere una base per aggiunta

Satz $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ lin. indep.

Siano $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ dei generatori (esistono perché V ha dim. finita)

Posso sostituire alcuni dei W con i U in modo da avere ancora dei generatori. Poi procedo come nella parte per eliminazione. Ci torneremo all'inizio della prox. lezione.

— 0 — 0 —