

- vettori linearmente dipendenti e indipendenti
- SPAN
- generatori
- basi
- dimensione
- combinazioni lineari

Def. (Comb. lineari) Sia V uno spazio vettoriale. Una comb. lin. è una scrittura del tipo

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m$$

↑
coefficienti↑

dove $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono vettori di V e $c_1, \dots, c_m$ sono numeri di K .

Def. (SPAN) Sia V uno sp. vett., e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ degli el. di V . Indichiamo con

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$$

l'insieme di tutte le possibili comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

(cioè che varia solo i numeri che metto davanti)

Esempio Se prendiamo un unico vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, allora

$$\text{Span}(\vec{v}) = \{c\vec{v} : c \in \mathbb{R}\}$$

è la retta per l'origine in direzione $\vec{v}$.

Se prendiamo 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$, allora

$$\text{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{a\vec{v} + b\vec{w} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

è il piano generato ("spannato") da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Prop. $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ è un s.sp. vett. di V

Dim Devo fare 2 verifiche.

① La somma di 2 comb. diu. è ancora una comb. diu.?

$$(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n) + (d_1 \vec{v}_1 + \dots + d_n \vec{v}_n)$$

$$= (c_1 + d_1) \vec{v}_1 + \dots + (c_n + d_n) \vec{v}_n \quad \text{SI!}$$

② Una comb. lin. moltiplicata per un numero è ancora una comb. lin.?

$$a(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n) = (ac_1) \vec{v}_1 + \dots + (ac_n) \vec{v}_n \quad \text{Sk!}$$

Def. (Generatori) Diciamo che $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono generatori di uno spazio vettoriale V se

$$\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = V$$

cioè se ogni vettore $\vec{v} \in V$ si può scrivere come

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{v}$$

per di scegliere bene i coeff. $c_1, \dots, c_n$.

Def. (Lineari dip. indip.) Diciamo che $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono lin. indep. se l'unica loro comb. lin. che viene $\vec{0}$ è quella con tutti i coeff. nulli. In simboli

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

$\uparrow$
0 vettore
 $\uparrow$
0 numero

Altrimenti si dicono linearmente dipendenti

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $(5, 1, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 0, 2)$
sono lin. dip. $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$

Infatti $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, quindi

$$1 \cdot \vec{v}_1 + (-1) \cdot \vec{v}_2 + (-1) \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Se non lo vedeva a occhio, scrivevo

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (5a+2b+3c, a+b, 3a+b+2c) = (0, 0, 0)$$

poi risolvevo il sistema

$$5a+2b+3c = 0$$

$$a+b = 0$$

$$3a+b+2c = 0$$

e vedeva se c'erano soluzioni oltre $a=b=c=0$.

Def. (Base) Un sottoinsieme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ di V si dice **BASE** di V se valgono queste 2 proprietà

(1) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono lin. indip.

(2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono generatori di V .

Esempio 1 I vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
sono una base di $\mathbb{R}^3$, detta BASE CANONICA.

① Sono lin. indip.? SÌ!

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (a, b, c) = (0, 0, 0) \text{ solo se } a=b=c=0$$

② Sono generatori? SÌ!

Preso un qualunque $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, posso trovare a, b, c numeri tali che $(A, B, C) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$?

Basta prendere $a=A$, $b=B$, $c=C$.

Esempio 2 I vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, -1)$$

Sono una base di $\mathbb{R}^3$?

① Sono lin. indep.?

$$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 2) + c(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ a+2b-c & = & 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \rightsquigarrow a=b=c=0 \quad (\text{ogni colonna ha il suo PIVOT})$$

② Sono generatori? Per ogni $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ voglio trovare a, b, c tali che

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = (A, B, C)$$

In forma di sistema diventa

$$\begin{cases} a+b = A \\ b+c = B \\ a+2b-c = C \end{cases}$$

Posso risolvere come prima, o osservare che lavorando sulla matrice troverei

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A' \\ 0 & 1 & 1 & B' \\ 0 & 0 & -2 & C' \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow$ questo ha soluzione (unica)
per lo stesso motivo di prima

— 0 — 0 —

Teorema Sia $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ una base di uno sp. vett. V .

Allora ogni vettore $\vec{v} \in V$ si scrive in MODO UNICO come comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

Dim. Perché esiste un modo di scrivere un certo $\vec{v} \in V$ come comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$?

Perché sono generatori!

E se si potesse scrivere in 2 modi?

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_m \vec{v}_m = b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_m \vec{v}_m$$

Portando dalla stessa parte trovo

$$(a_1 - b_1) \vec{v}_1 + \dots + (a_m - b_m) \vec{v}_m = \vec{0}$$

Essendo lin. indep. per forza deve essere $a_1 - b_1 = \dots = a_m - b_m = 0$
cioè

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_m = b_m.$$

— 0 — 0 —

Esempio Una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è
 $x^3, x^2, x, 1$

Data la base il polinomio $x^3 - x^2 + 7$ lo pensavo come
(1, -1, 0, 7)

↑ coeff. dell' unica comb. lin. che descrive
il pol. dato