

Strutture algebriche astratte

- gruppo
- gruppo commutativo
- anello
- corpo
- campo

→ modulo

→ spazio vettoriale

Defn (Campo) Un campo è un insieme K sul quale sono definite 2 operazioni binarie (INPUT: 2 elementi OUTPUT: 1 el.) dette somma e prodotto, con le proprietà "solite"

- (s1) $a+b = b+a$
- (s2) $(a+b)+c = a+(b+c)$
- (s3) $\exists 0 \in K$ t.c. $0+a = a+0 = a$
- (s4) $\forall a \in K \exists b \in K$ t.c. $a+b = 0$
 $\uparrow$
 $-a$

per esercizio scrivere per bene le quantificazioni

- (p1) $a \cdot b = b \cdot a$
- (p2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (p3) $\exists 1 \in K$ t.c. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
- (p4) $\forall a \in K$ con $a \neq 0 \exists b \in K$ t.c. $a \cdot b = 1$
 $\uparrow$
 $\frac{1}{a}$

$$(d) a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esempi di campo $\mathbb{R}$ $\uparrow$ numeri reali $\mathbb{Q}$ $\uparrow$ razionali (frazioni) $\mathbb{C}$ $\uparrow$ complessi

Non sono campi invece

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (manca (p4) e (s4))

$\mathbb{Z}$ = numeri interi (manca (s4) (p4))

$\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi (manca (s4) (p4))

Def (SPAZIO VETTORIALE) Sia $\mathbb{K}$ un campo (per noi sarà quasi sempre $\mathbb{R}$). Uno spazio vettoriale V è un insieme più due operazioni

→ somma (INPUT: 2 el. di V OUTPUT: 1 el. di V)

→ prodotto per scalare (INPUT: 1 el. di V , 1 el. di $\mathbb{K}$
OUTPUT: 1 el. di V)

con queste proprietà

$$(s1) \vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u}$$

$$(s2) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(s3) \exists \vec{0} \in V \text{ t.c. } \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall v \in V$$

$$(s4) \forall \vec{v} \in V \exists \vec{w} \in V \text{ t.c. } \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

$\uparrow$
 $-\vec{v}$

$$(p1) a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v} \quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$(p2) 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

$$(d1) (a+b)\vec{v} = a \cdot \vec{v} + b\vec{v}$$

$$(d2) a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$$

Esempi di spazio vettoriale (sempre con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

1 $V = \mathbb{R}$ con le usuali operazioni

2 $V = \mathbb{R}^d$

[3] Fissati m ed n interi positivi, $M_{m \times n}$ è uno sp. vett.

$\vec{0}$ = matrice tutta nulla

Le operazioni sono somma di matrici e prodotto di una matrice per un numero (non consideriamo il prodotto tra matrici)

[4] $\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi è uno sp. vett. rispetto alle operazioni

→ somma di 2 polinomi

→ prodotto di un pol. per un numero

Il prodotto di polinomi qui non ci interessa

[5] $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi (a coeff. reali) di grado ≤ 3 è uno sp. vett. rispetto alle operazioni come in [4].

[6] $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ = polinomi di grado ≥ 3 NON è uno sp. vettoriale rispetto alle solite operazioni

Va male la somma

$$p(x) = x^4 + x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

$$q(x) = -x^4 + x \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

La loro somma $p(x) + q(x) = x^2 + x \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$.

Oss. In [5] e [6] posso sostituire 3 con un intero positivo qualunque.

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def. Sia V uno spazio vettoriale.

Un sottospazio vettoriale è un sottoinsieme $W \subseteq V$ che è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare cioè

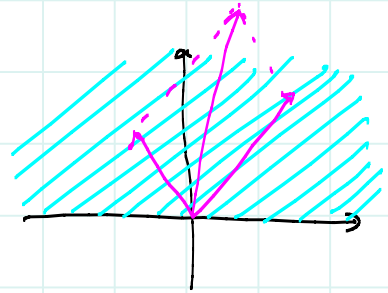
(1) per ogni $\vec{w}_1 \in W$ e $\vec{w}_2 \in W$ si ha $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

(2) per ogni $\vec{w} \in W$ e per ogni $a \in \mathbb{K}$ si ha $a\vec{w} \in W$.

Oss. Si può verificare che W , con le operazioni che "eredita" da V , è a sua volta uno sp. vett.

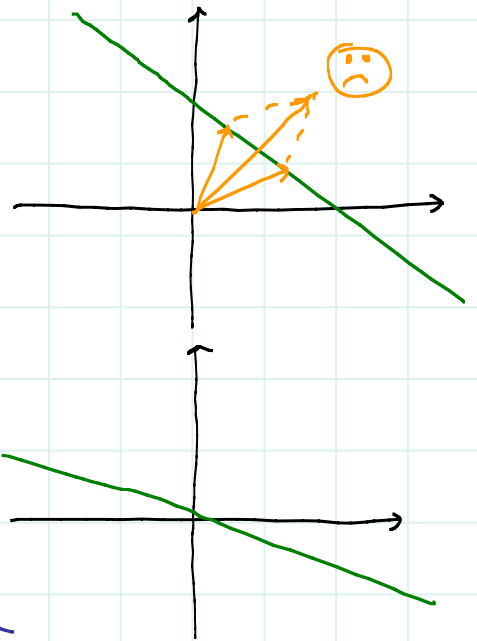
Esempio 1 $V = \mathbb{R}^2$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$



NON è un s.sp. vett. (la somma ok, ma il prodotto per neg. no)

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 12\}$$



NON è un s.sp. vett. (somma e prod. vanno male entrambi)

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$$

Strategia

→ come dimostro che un certo W NON è un sottosp. vettoriale?

Basta fare una di queste due cose

- trovare due el. in W la cui somma NON sta in W

- trovo $\vec{w} \in W$ e $a \in \mathbb{R} (= \mathbb{K})$ t.c. $a\vec{w} \notin W$

→ come dimostro che un certo W è un s.sp. vett. ?
"Devo fare una dim. generale"

Prendo (x_1, y_1) t.c. $x_1 + 2y_1 = 0$

(x_2, y_2) t.c. $x_2 + 2y_2 = 0$

La loro somma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ verifica $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$

Stessa cosa per il prodotto. Se (x, y) verifica $x + 2y = 0$,
allora (ax, ay) verifica $(ax) + 2(ay) = 0$

— o — o —