

TRASPOSTA DEL PRODOTTO

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

La trasposizione del prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine scambiato

Sia $A \in M_{m \times k}$ e sia $B \in M_{k \times n}$. Quindi $A \cdot B$ ha senso $\in M_{m \times n}$

Ora $B^t \in M_{n \times k}$ e $A^t \in M_{k \times m}$. Quindi $B^t \cdot A^t$ ha senso, $\in M_{n \times m}$

def. traspo.

Dim. $[(A \cdot B)^t]_{i,j} = (A \cdot B)_{j,i}$

formula per prod.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s=1}^k (A)_{j,s} \cdot (B)_{s,i} \\
 &= \sum_{s=1}^k (B)_{s,i} \cdot (A)_{j,s} \\
 &= \sum_{s=1}^k (B^t)_{i,s} \cdot (A^t)_{s,j} \\
 &= (B^t \cdot A^t)_{i,j}
 \end{aligned}$$

Oss. Se $A \in M_{m \times n}$ e x è un vettore colonna lungo n
 $\in M_{n \times 1}$

allora posso sempre calcolare Ax e viene un vettore colonna lungo m .

Tutti i sistemi lineari si scrivono in questa forma!

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{equazioni} \\ \uparrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{incognite} \\ \uparrow \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

In generale un sistema lineare si scrive nella forma

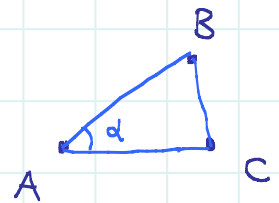
$$Ax = b$$

- dove
- A è una matrice $n \times m$
 - x è un vettore colonna lungo m (incognite)
 - b è " " " " n (termini noti)

Le dimensioni permettono di fare i prodotti e tornare!

Esercizio 1 Calcolare l'area del triangolo nel piano con vertici
in $(1, 2)$ $(3, 1)$ e $(5, -2)$
A B C

1° modo Usare formula trigonometrica per
l'area



$$\text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$AB = v = B - A = (2, -1)$$

$$AC = w = C - A = (4, -4)$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad \text{Sostituendo}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \sqrt{1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}} = \frac{1}{2} \cancel{\|v\|} \cdot \cancel{\|w\|} \sqrt{\frac{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}{\cancel{\|v\|^2} \cdot \cancel{\|w\|^2}}}$$

Alla fine resta

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

dove $v = B - A$
 $w = C - A$

Questa formula in qualunque numero di variabili.

2° modo

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza}$$

↑
AB

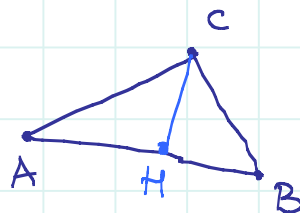
↑
CH

↑

$\|B - A\|$

↑

distanza di C dalla retta AB



$$A = (1, 2) \quad B = (3, 1) \quad C = (5, -2)$$

$$AB = \|B - A\| \\ = \|(2, -1)\| = \sqrt{5}$$

$$\text{retta AB in parametrica: } (1, 2) + t(2, -1) = (\underbrace{1+2t}_x, \underbrace{2-t}_y)$$

$$t = 2 - y \quad \xrightarrow{1^a} \quad 1 + 2(2 - y) = x \quad \xrightarrow{2^a} \quad 1 + 4 - 2y = x \quad \xrightarrow{\quad} \quad \boxed{x + 2y - 5 = 0}$$

↑
retta AB in
cartesiana

$$CH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 2$$

Oss. Se uno volesse H, basta scrivere la retta per C che è $\perp$ ad AB, quindi intersecare

$$\text{In parametrica sarebbe } (5, -2) + t(1, 2)$$

↑ direzione $\perp$ alla retta AB.

$$= (5 + t, -2 + 2t) \quad \xrightarrow{\quad} \quad \text{sostituisco su retta AB}$$

$$(5 + t) + 2(-2 + 2t) - 5 = 0 \quad \xrightarrow{\quad} \quad \text{trovo } t.$$

— 0 — 0 —

Metodo alternativo per l'area

VALE SOLO IN $\mathbb{R}^3$

$$v = B - A$$

$$w = C - A$$

A partire da w e v applico la formula misteriosa e trovo un vettore u ad entrambi. lo chiamo u . Ebbene

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

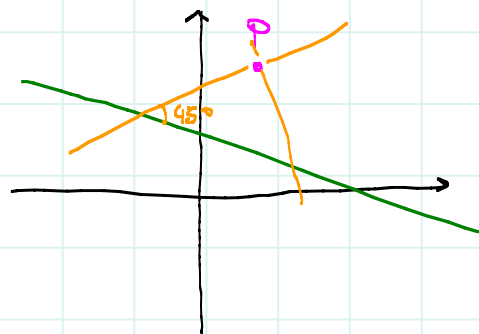
Basta fare il contaccio e vedere che

$$\|u\|^2 = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

Esercizio

Consideriamo la retta $x + 2y - 5 = 0$ e il p.to $P = (1, 3)$

Scrivere le eq. delle due rette che passano per P e formano un angolo di 45° con quella data



In parametrica una retta per P si scrive come $(1, 3) + t(a, b)$

La retta data la possiamo scrivere in parametrica come retta per

$$A = (5, 0) \quad B = (3, 1) \quad \text{quindi} \quad (5, 0) + t(2, -1)$$

metto $y=0$

N.B. $\uparrow$ è $\perp$ a $(1, 2)$

Noi vogliamo che l'angolo tra (a, b) e $(2, -1)$ sia di 45° , cioè abbia $\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\langle (a, b), (2, -1) \rangle}{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a - b}{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Facciamo il quadrato

$$5(a^2 + b^2) = 2(2a - b)^2 = 8a^2 - 8ab + 2b^2$$

$$5a^2 + 5b^2$$

$$\text{Metto } b=1 \rightsquigarrow 5a^2 + 5 = 8a^2 - 8a + 2 \rightsquigarrow 3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3} \rightsquigarrow \begin{matrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

così ottengo le parametriche delle due rette.

[Soluzioni corrette dopo video].