

MATRICI

MATRICI

Una matrice è una tabella di numeri

$M_{m \times n}$ = insieme delle matrici $m \times n$
↑ ↑
righe colonne

Esempi

Esempi: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$, $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}$

Notazione: usiamo lettere minuscole per le matrici.

Per gli elementi usiamo notazioni

$a_{i,j}$ $\nwarrow$ $\nearrow$ $(A)_{i,j}$
 elemento che nella matrice A sta
 nella riga i e colonna j

Esempi Con riferimento a sopra:

$$a_{1,1} = 1 = (A)_{1,1}$$

$$a_{1,2} = (A)_{1,2} = 2$$

$$b_{2,2} = (B)_{2,2} = 0$$

$$b_{3,2} = (B)_{3,2} \quad \text{NON HA SENSO}$$

$$b_{2,3} = (B)_{2,3} = 5$$

Casi speciali $\boxed{1}$ $n=m=1$ La matrice è un singolo numero

2 $n=1$ e in qualunque. La matrice si chiama

VEETTORE RIGA

$$(a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,m})$$

3) n qualunque e $m = 1$

→ VETTORI COLONNA

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

OPERAZIONI TRA MATRICI

- ① **SOMMA** Si fa termine a termine tra matrici della
STESSA DIMENSIONE

Se $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{n \times m}$, allora $A+B \in M_{n \times m}$ e

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}$$

- ② **PRODOTTO MATRICE · NUMERO** (o viceversa)

Basta moltiplicare tutti i termini della matrice per il numero.

Se $A \in M_{n \times m}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda A = A \cdot \lambda \in M_{n \times m}$ e

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$$

- ③ **PRODOTTO TRA DUE MATRICI**

Intanto devono avere **dimensioni compatibili** del tipo

$$A \in M_{n \times k}$$

$$B \in M_{k \times m}$$

il # di colonne della prima
è = al numero di righe
della seconda

In questo caso si può calcolare $AB \in M_{n \times m}$ e vale

$$(AB)_{i,j} = \sum_{l=1}^k (A)_{i,l} (B)_{l,j}$$

hanno senso perché
A ha k colonne
B ha k righe

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\in M_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\in B_{2 \times 3}$$

il prodotto ha senso
e sarà matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & 15 & 25 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{☹️} \quad \text{Non si può fare}$$

Proprietà del prodotto

Come ci si aspetta, il prodotto si distribuisce rispetto alla somma

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A+B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{purché le dim. consentano} \\ \text{di fare i prodotti} \end{array} \right\}$$

Il prodotto è ASSOCIATIVO, cioè $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
purché le dim. siano compatibili

La dimostrazione segue da una formulaccia, del tipo

$$(ABC)_{i,j} = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n A_{i,s} B_{s,t} C_{t,j}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

$$A \in M_{n,k}$$

$$B \in M_{k,n}$$

$$C \in M_{n,m}$$

FATTO IMPORTANTE

In generale $A \cdot B \neq B \cdot A$, anche se si possono fare entrambi

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Oss. Le matrici $\square$ della stessa dim. si possono sempre moltiplicare, in qualunque ordine.

4 **TRASPOSTA** Se $A \in M_{m \times n}$, allora la trasposta di A è la matrice $A^T \in M_{n \times m}$ ottenuta da A scambiando tra di loro righe e colonne, cioè

$$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i} \quad [\text{Talvolta si trova indicata come } {}^T A]$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTICA

Per ogni $n \geq 1$, è la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla "diagonale principale" e tutti 0 altrove. Si indica con I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà fondamentale

Se $A \in M_{m \times n}$ (quindi quadrata)
e $I \in M_{m \times m}$ è la matrice identica,
allora

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Dim. Segue dalla formula per il prodotto. Ad esempio

$$(A \cdot I)_{i,j} = \sum_{s=1}^n (A)_{i,s} (I)_{s,j} = (A)_{i,j}$$

↑
vale sempre 0,
tranne quando $s=j$

[Notazioni sist.
mate dopo video]

$$(I \cdot A)_{i,j} = \sum_{s=1}^n (I)_{i,s} (A)_{s,j} = (A)_{i,j}$$

↑
è l'unico diverso da 0
è quello con $s=i$,
che vale 1

Esercizio Cosa succede se A = vettore riga e B = vettore colonna

$$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$$

Se le lunghezze sono le stesse, viene
un numero, o meglio una matrice 1×1 ,
che è una specie di prodotto scalare.
— 0 — 0 —