

### MOTUA POSIZIONE DI UNA RETTA E UN PIANO

- ① RETTA CONTENUTA NEL PIANO (infinita intersezioni)
- ② RETTA PARALLELA AL PIANO (intersezione vuota)
- ③ INCIDENTI (intersezione unica)

e quando succede uno si chiede

→ chi è il p.to di inters.

→ angolo che la retta forma con il piano

Come li interseco? Scenario migliore: piano in cartesiana, retta in parametrica

Esempio 1  $2x - 3y + 5z = 4$   $(1, 0, -1) + t(2, 3, -2)$

Scrivo la retta come  $(1+2t, 3t, -1-2t)$  e sostituisco nella cartesiana del piano

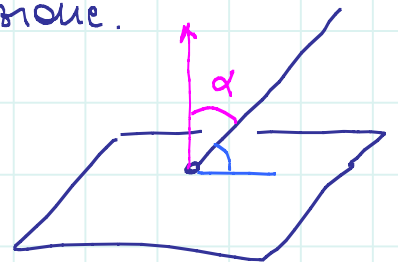
$$2 + 4t - 9t - 5 - 10t = 4 \quad \leadsto \quad 15t = -7 \quad \leadsto \quad t = -\frac{7}{15}$$

Sostituendo nella retta trovo il p.to di intersezione.

Come calcolo l'angolo?

→ Trovo l'angolo (acuto!)  $\alpha$  tra la dir. della retta e l'  $(a, b, c)$  del piano

→ Calcolo  $90^\circ - \alpha$ .



$$\cos \alpha = \frac{\langle (2, -3, 5), (2, 3, -2) \rangle}{\| (2, -3, 5) \| \cdot \| (2, 3, -2) \|} = -\frac{15}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}}$$

Essendo negativo,  $\alpha$  è ottuso, quindi non è  $2\alpha$  della figura, ma il suo "supplementare". Quindi per calcolare  $\alpha$  alla fine devo fare  $180^\circ$  - quello che è venuto.



## Esercizio 2 Consideriamo

$$A = (2, 1, 0)$$

$$B = (1, 1, 2)$$

$$C = (-1, 0, 1)$$

Scrivere la cartesiana del piano che passa per A ed è  $\perp$  alla retta BC.

Scrivo la retta  $B + t(C - B) = (1, 1, 2) + t(-2, -1, -1)$

Se non piacciono i negativi, va bene anche

$$(1, 1, 2) + t(2, 1, 1) \quad \text{oppure} \quad (-1, 0, 1) + t(4, 2, 2)$$

Ora il piano  $\perp$  alla retta sarà del tipo

$$\begin{array}{c} 2x + y + z = d \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{direzione della retta} \end{array}$$

Sostituendo A nel piano  
trovo  $d = 5$

$$\boxed{2x + y + z - 5 = 0}$$

Scrivere equ. cartesiane del piano che passa per A, B, C.

1° modo  $ax + by + cz - d = 0 \leadsto$  sostituisco A, B, C e ottengo un sistema di 3 equ in  $a, b, c, d$

$$\begin{cases} 2a + b - d = 0 \\ a + b + 2c - d = 0 \\ -a + c - d = 0 \end{cases}$$

2° modo Scrivo il piano in parametrica

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

$$(2, 1, 0) + t(-1, 0, 2) + s(-3, -1, 1)$$

Ora passo in cartesiana con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2, -5, 1)$$

Quindi il piano è  $2x - 5y + z = d$

Imponendo il passaggio per A (o B o C) trovo  $d = -1$

$$2x - 5y + z + 1 = 0$$

Verifica sostituendo A, B, C

Scrivere la retta che passa per A ed è  $\perp$  al piano

In parametrica  $(2, 1, 0) + t(2, -5, 1)$ .

$\uparrow$  vettore  $\perp$  al piano

— o — o —

Esercizio 3 Nel piano consideriamo la retta  $ax + by + c = 0$  ed il p.to  $(x_0, y_0)$ .

Calcolare la distanza punto / retta.

Scriviamo la retta per P che è  $\perp$  alla retta data

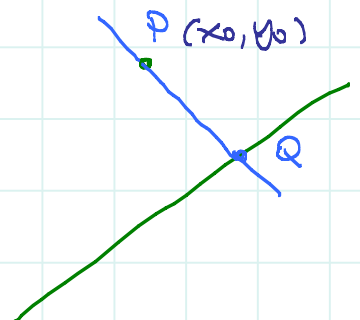
$$(x_0, y_0) + t(a, b)$$

Interseco con la retta e trovo Q

$(x_0 + at, y_0 + bt)$   $\rightsquigarrow$  sostituisco nell' eq. data

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$$

$$(a^2 + b^2)t = -(ax_0 + by_0 + c) \rightsquigarrow \text{ricavo } t \text{ e quindi } Q$$



$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\text{punto}, \text{retta}) &= \|Q - P\| = \left\| \underbrace{(x_0, y_0) + t(a, b)}_Q - \underbrace{(x_0, y_0)}_P \right\| \\
 &= |t| \cdot \|(a, b)\| \\
 &= |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{\overset{\substack{\uparrow \\ \text{valore di } t \text{ trovato} \\ \text{sopra}}}{|ax_0 + by_0 + c|}}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
 \end{aligned}$$

Esercizio 4 Distanza di  $(x_0, y_0, z_0)$  dal piano  $ax + by + cz + d = 0$ .  
 $\downarrow$

Retta per P e  $\perp$  al piano è  $(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

Interseco con il piano e trovo il p.to Q di intersezione

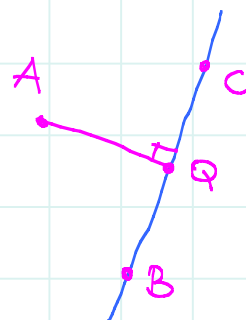
Faccio la norma  $\|Q - P\|$ .

Otteniamo

$$\text{dist}(\text{punto}, \text{piano}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esercizio 5 Dati  $A = (1, 0, 2)$   
 $B = (5, 1, 1)$   
 $C = (6, -1, 2)$

Calcolare la distanza di A dalla retta BC



1° modo scrivo la retta in parametrica

$$\begin{aligned}
 B + t(C - B) &= (5, 1, 1) + t(1, -2, 1) \\
 &= (5 + t, 1 - 2t, 1 + t) = P
 \end{aligned}$$

$$\|A - P\|^2 = (4 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (-1 + t)^2$$

Minimizzo questa funzione (pol. di 2° grado) [Fare il conto!]

**2° modo** Cerco il p.to Q della retta tale che  $AQ \perp BC$

Come prima

$$AQ = (4+t, 1-2t, -1+t) \quad \text{p.to generico retta - A}$$

$$\langle (4+t, 1-2t, -1+t), (1, -2, 1) \rangle = 0$$

$$4+t-2+4t-1+t=0 \rightsquigarrow 6t=-1 \rightsquigarrow t=-\frac{1}{6}$$

Per  $t = -\frac{1}{6}$  trovo il p.to Q

**3° modo** Scrivo il piano per A che è  $\perp$  alla retta, poi interseco con la retta e ottengo Q.

Piano:  $x - 2y + z = d$   
 $\uparrow$  lo ottengo imponendo passaggio per A

$$d = 3 \quad x - 2y + z = 3$$

Sostituendo la retta trovo  $(5-t) - 2(1-2t) + (1+t) = 3$   
 $\rightsquigarrow$  trovo t.

$$\text{---} 0 \text{ ---} 0 \text{ ---}$$