

PIANI NELLO SPAZIO

- forma cartesiana
- forma parametrica
- mutua posizione
- rapporti con le rette nello spazio

CARTESIANA

Piano passante per l'origine

(si intende che a, b, c non sono tutti nulli)

$$ax + by + cz = 0$$

↑ tutti i p.ti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che hanno prod.

scalare nullo (e quindi sono $\perp$) al vettore (a, b, c)

Significato geom. (a, b, c) = vettore $\perp$ al piano.

$$ax + by + cz = d$$

piano + generale, che passa per l'origine se e solo se $d = 0$

PARAMETRICA

Un piano in parametrica è

$$v + t w_1 + s w_2$$

↑
↑
due parametri reali

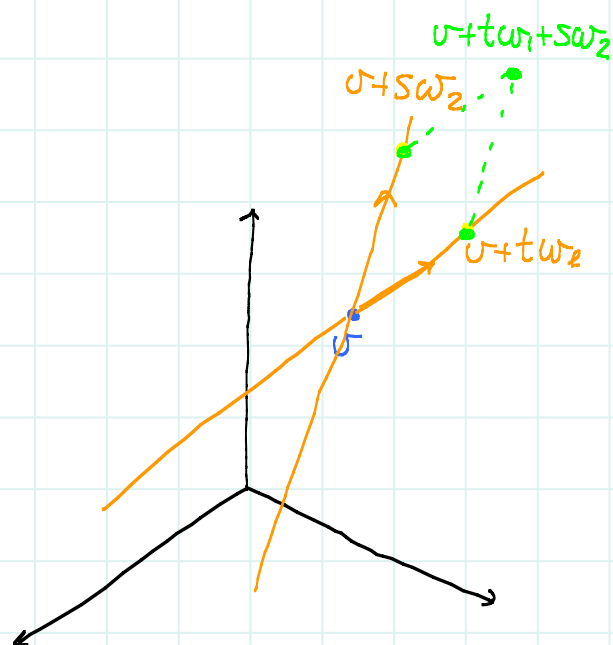
v, w_1, w_2 sono tre vettori di $\mathbb{R}^3$

Esempio

$$(1, 0, 1) + t(2, 3, 5) + s(-1, 1, 3)$$

v w_1 w_2

"parto da v ed aggiungo una somma (calcolata con il parallelogramma) di un multiplo di w_1 ed un multiplo di w_2 ".



PASSAGGIO TRA LE FORME

1° scenario Conosco la cartesiana e voglio la parametrica

Esempio $x + y - 2z = 6$

1° modo "Risolvo il sistema", ad esempio usando y e z come variabili libere

$$z = t, \quad y = s, \quad x = 6 + 2z - y = 6 + 2t - s$$

Quindi

$$(x, y, z) = (6 + 2t - s, s, t) = \underbrace{(6, 0, 0)}_v + t \underbrace{(2, 0, 1)}_{w_1} + s \underbrace{(-1, 1, 0)}_{w_2}$$

Osserviamo che w_1 e w_2 sono $\perp$ al vettore $(1, 1, -2)$, che è il vettore (a, b, c) nella cartesiana del piano.

2° modo Trovo 3 punti P, Q, R distinti del piano, e poi scrivo

$$P + t(Q - P) + s(R - P)$$

$$x + y - 2z = 6$$

$$y = 1, z = 0 \leadsto x = 5 \leadsto P = (5, 1, 0)$$

$$y = 0, z = 1 \leadsto x = 8 \leadsto Q = (8, 0, 1)$$

$$y = 3, z = 2 \leadsto x = 7 \leadsto R = (7, 3, 2)$$

$$\underbrace{(5, 1, 0)}_v + t \underbrace{(3, -1, 1)}_{w_1} + s \underbrace{(2, 2, 2)}_{w_2}$$

3° modo Cerco a caso v che risolve $x + y - 2z = 6$ e cerco w_1 e w_2 che risolvono $x + y - 2z = 0$ ☺

2° scenario Conosco la parametrica e voglio la cartesiana

Esempio

$$(1, 2, -3) + t(1, 0, 4) + s(0, -1, 3)$$

1° modo L'equazione sarà $ax + by + cz = d$. D'altra parte, deve essere soddisfatta da tutti i punti

$$(x, y, z) = (1+t, 2-s, -3+4t+3s)$$

Sostituisco:

$$a(1+t) + b(2-s) + c(-3+4t+3s) = d$$

$$a + \underbrace{at}_{\text{1st}} + 2b - \underbrace{bs}_{\text{2nd}} - 3c + \underbrace{4ct}_{\text{3rd}} + \underbrace{3cs}_{\text{4th}} - d = 0$$

Questa deve essere vera per ogni valore di t ed s , quindi impongo che i coeff. siano nulli

$$\begin{cases} a+4c=0 & \text{coeff. t} \\ -b+3c=0 & \text{coeff. s} \\ a+2b-3c-d=0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = -4c$$

$$b = 3c$$

$$\begin{aligned} -4c + 6c - 3c - d &= 0 \\ \Rightarrow d &= -c \end{aligned}$$

sistema di 3 equ. in 4 incognite

Abbiamo un grado di libertà (c'è come ci pare)

$$c = 1 \rightsquigarrow a = -4 \rightsquigarrow b = 3 \rightsquigarrow d = -1$$

$$-4x + 3y + z + 1 = 0$$

FORMA CARTESIANA

2° modo $(1, 2, -3) + t(1, 0, 4) + s(0, -1, 3)$

Sappiamo che (a, b, c) deve essere $\perp$ a w_1 e w_2

Esiste una formula che fornisce un vettore $\perp$ a due vettori dati

FORMULA MISTERIOSA

Siano dati

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

↑
cambio di
segno

Il vettore ottenuto è $\perp$ agli altri 2 !!

Morale: potevamo applicare la formula misteriosa partendo da w_1 e w_2

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (4, -3, -1) \rightsquigarrow \text{questi sono } (a, b, c) \text{ del piano}$$

$$4x - 3y - z = 1$$

$$(x, y, z) = (1, 2, -3)$$

— o — o —

MUTUA POSIZIONE DI DUE PIANI

Due piani nello spazio possono essere

- ① COINCIDENTI (intersezione è un piano, con 2 parametri)
- ② PARALLELI (intersezione vuota)
- ③ INCIDENTI (intersezione è una retta, che dipende da un solo parametro)

e in tal caso uno vorrebbe $\rightarrow$ la retta intersezione
 $\rightarrow$ l'angolo fra i 2 piani

Come calcolo l'intersezione? Passo in cartesiana, e risolvo il sistema

Come calcolo l'angolo? Vado in cartesiana, e trovo l'angolo fra i vettori (a, b, c) corrispondenti.

— o — o —