

Mutua posizione di 2 rette nel piano

Date due rette r_1 ed r_2 stabilire se sono

- ① COINCIDENTI, cioè la stessa retta (infinita intersezione)
- ② PARALLELE (nessuna intersezione)
- ③ INCIDENTI (intersezione unica)

In tal caso ci chiediamo

→ qual è il p.to di intersezione

→ determinare l'angolo fra le due rette.

Le due rette possono essere date in varia forma

1° caso Conosco le forme cartesiane.

Le metto a sistema e risolvo

Esempio 1 $y = 3x - 5$ $2x - 3y = 7$

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 31 \end{array} \right)$$

$$-7y = 31 \rightsquigarrow y = -\frac{31}{7}$$

$$\begin{aligned} -3x + y = -5 &\rightsquigarrow -3x = -5 - y \\ &= -5 + \frac{31}{7} = -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4}{21}$$

Conclusione: le 2 rette sono incidenti e si incontrano in $\left(\frac{4}{21}, -\frac{31}{7}\right)$

Come calcolo l'angolo?

$$\begin{aligned} -3x + y &= -5 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

Consideriamo i vettori $(-3, 1)$ e $(2, -3)$
↑
coeff. di x e y nelle 2 implicite

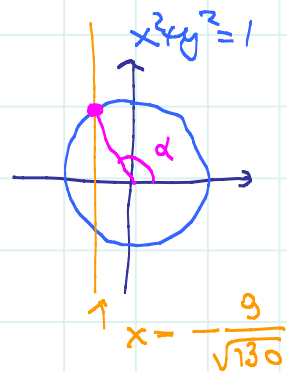
FATTO GENERALE

Scritta una retta come $ax+by+c=0$
oppure $ax+by=d$, allora (a, b) è un
vettore $\perp$ alla retta.

Dando questo per buono, l'angolo che cerco è quello tra
 $v = (-3, 1)$ e $w = (2, -3)$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{-6-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$

→ da qui si può ricavare α



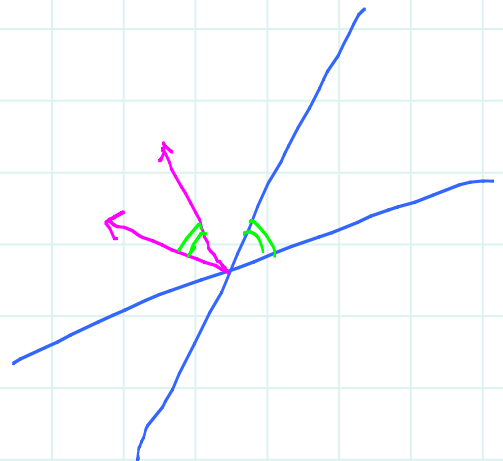
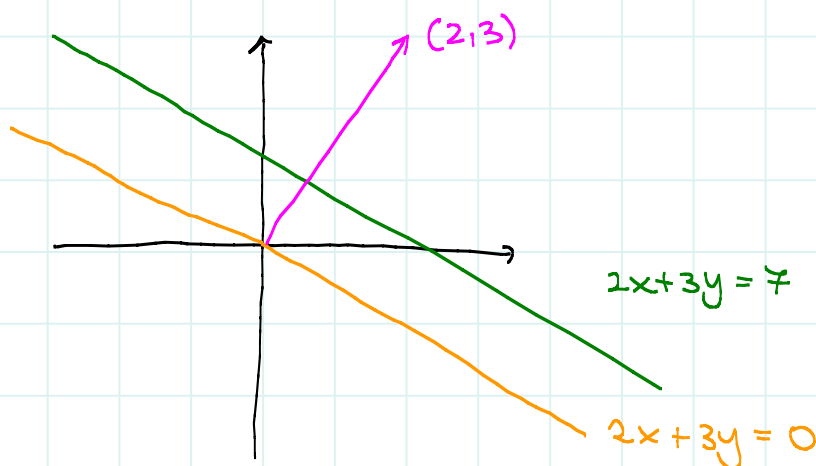
Come si vede il fatto generale?

Considero

$$2x+3y=7 \quad \rightarrow \text{retta } r$$

$$\underbrace{2x+3y=0}_{\uparrow} \quad \rightarrow \text{passa per l'origine ed è } \parallel \text{ ad } r$$

l'insieme di tutti i vettori (x, y) che
sono $\parallel$ al vettore $(2, 3)$



2° caso Le due rette sono date in forma parametrica

Esempio 2

$$(1, 2) + t(-1, 3)$$

$$(3, 1) + t(1, 1)$$

1° modo: passo in cartesiana e ragiono come prima

2° modo: lavoro direttamente in parametrica

$$r_1: (1-t, 2+3t)$$



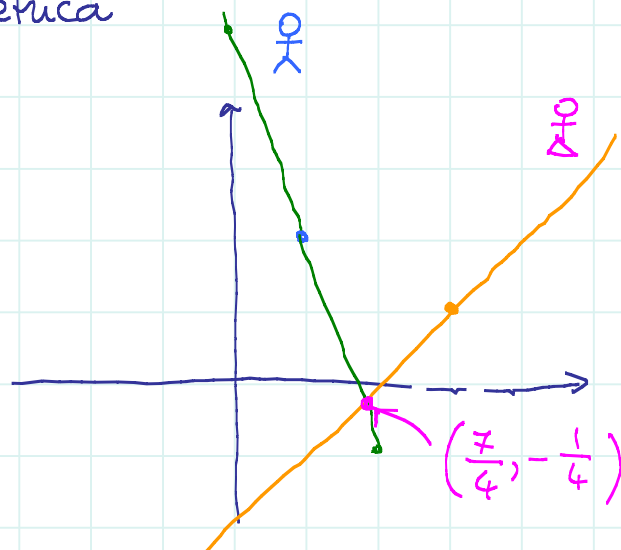
$$r_2: (3+t, 1+t)$$



Non bisogna mettere a sistema

$$\begin{cases} 1-t = 3+t \\ 2+3t = 1+t \end{cases}$$

Vorrebbe dire che e passano per il p.to in comune nello stesso tempo.



Da fare: uso 2 lettere diverse per il parametro

$$\begin{cases} 1-t = 3+s & t+s = -2 & \text{sommo: } 4t = -3 \Rightarrow t = -\frac{3}{4} \\ 2+3t = 1+s & 3t-s = -1 \end{cases}$$

Sostituendo t nella 1° retta trovo $(1-t, 2+3t) = (\frac{7}{4}, -\frac{1}{4})$

Verifica: ricavo s dal sistema, sostituisco nella seconda retta e trovo lo stesso punto.

In questo per l'angolo basta fare l'angolo tra le 2 direzioni

$$\cos \alpha = \frac{\langle (-1, 3), (1, 1) \rangle}{\|(-1, 3)\| \cdot \|(1, 1)\|} = \frac{2}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3° caso

$$y = 5x - 2$$

$$(1, 2) + t(3, 4)$$

$$(1+3t, 2+4t)$$

1° modo: tutto in cartesiana

2° modo: " " parametrica

3° modo: sostituisco la param. nella cartesiana

$$2+4t = 5(1+3t) - 2 \rightarrow \text{risolvo} \quad 2+4t = 5+15t - 2$$

$$11t = -1 \rightarrow t = -\frac{1}{11}$$

$\rightarrow$ sostituisco nella 2ª e ho l'intersezione!

— o — o —

RETTE NELLO SPAZIO

Per ora le consideriamo solo in
parametrica

$w + t v$
 $\uparrow$ pto iniziale $\nwarrow$ direzione

Date due rette, queste possono essere

① COINCIDENTI (infinita intersezioni)

② INCIDENTI (intersezione unica)

③ PARALLELE (nessuna intersezione, direzioni una multipla dell'altra)

④ SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni non multiple)

Esempio

$$r_1: (1, 2, 3) + t(1, 0, -1)$$

$$r_2: (-1, 0, 5) + t(1, 2, -a)$$

$\uparrow$ parametro

Domanda: esiste un valore di a per cui si intersecano?

Scrivo le due parametriche con 2 parametri diversi

$$(1+t, 2, 3-t)$$

$$(-1+s, 2s, 5-as)$$

Metto a sistema

$$\begin{cases} 1+t = -1+s \\ 2 = 2s \\ 3-t = 5-as \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{matrix} t = -1 \\ s = 1 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} t = -1 \\ s = 1 \end{matrix}} \right\} \quad 4 = 5-a \quad \leadsto \quad \boxed{a=1}$$

Le due rette si intersecano nel caso $a=1$.

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) + t(1, 0, -1) & \quad (-1, 0, 5) + t(1, 2, -1) \\ t = -1 \leadsto (0, 2, 4) & \quad t = -1 \leadsto (0, 2, 4) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Concludiamo: per $a=1$ il p.to di intersezione è $(0, 2, 4)$

Per calcolare l'angolo

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 0, -1), (1, 2, -1) \rangle}{\|(1, 0, -1)\| \cdot \|(1, 2, -1)\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

↑
angolo acuto formato
dalle 2 rette.

Esercizio Scrivere la retta per $(1, 1, 1)$ parallela alla retta
 $(5+t, -t, 2+3t)$

$$\leadsto (5, 0, 2) + t(1, -1, 3)$$

$$(1+t, 1-t, 1+3t) \leadsto$$

$$(1, 1, 1) + t(1, -1, 3)$$

Anche bene anche $(1, 1, 1) + t(-2, 2, -6)$

— o — o —