

Algoritmo di GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Matrice associata al sistema

Copio R_1 $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$

$R_2 - R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}$

$R_3 - 2R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -7 & -1 \end{array}$

Copio R_1 $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$

Copio R_2 $\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}$

$R_3 - R_2$ $\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}$

Se riscriviamo con le variabili, abbiamo

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -3y - 2z &= 1 \\ -5z &= -2 \end{aligned}$$

$$z = \frac{2}{5} \leadsto 3y = -2z - 1 = -\frac{4}{5} - 1 = -\frac{9}{5}$$

$$\leadsto y = -\frac{3}{5} \leadsto \text{ricavo } x \text{ dalla } 1^a$$

VERIFICA

Obiettivo: ARRIVARE AD AVERE LA FORMA A SCALA

Esempio 2 (quello di prima era 1)

$$\begin{aligned} y + z &= 5 \\ x - 3y + z &= 4 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Copio la 1^a $\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}$

Copio la 2^a $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$

$R_3 - R_1$ $\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}$

Copio la 1^a $\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}$

Copio la 2^a $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$

$R_3 - 3R_2$ $\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}$

$$x - 3y + z = 4$$

$$y + z = 5$$

$$-3z = -18$$

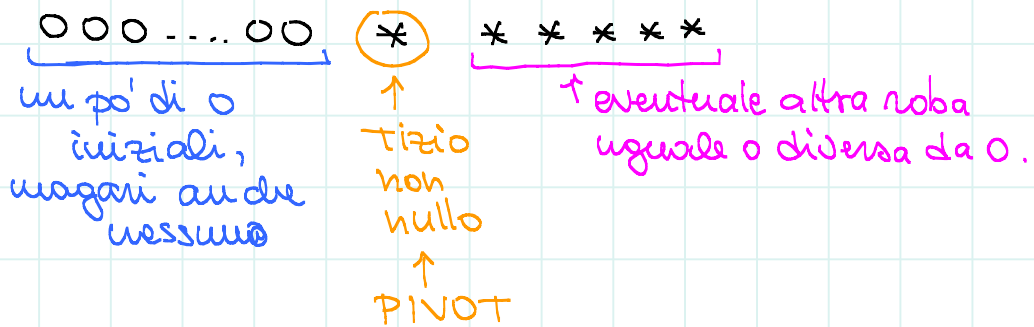
$$\leadsto z = 6$$

$$y = -1$$

$$x = 4 + 3y - z = -5$$

$\leadsto$ Soluzione unica $(x, y, z) = (-5, -1, 6)$ $\leftarrow$ VERIFICA OK

Una matrice a scala a tutte le righe di questo tipo



Tutte ogni riga ha almeno uno zero iniziale in più della precedente.

Lavorando alla Gauss, possiamo trasformare ogni matrice in una matrice a scala.

Le operazioni consentite sono due

→ scambiare 2 righe

→ Sostituire R_j con $aR_j + bR_i$ e a, b sono numeri
 ↑ altra riga ($i \neq j$)

Ci sono due versioni della mossa:

- Ultraortodossa : $a = 1$
- elastica o flessibile : $a \neq 0$.

Queste operazioni non cambiano le soluzioni del sistema, cioè i due sistemi prima e dopo hanno le stesse soluzioni.

Con la prima operazione è ovvio.

Vediamo la seconda

All'inizio $R_i = 0$ (supponendo tutto dalla stessa parte)

$$R_j = 0$$

Alla fine $R_i = 0$

$$a R_j + b R_i = 0$$

Viceversa, se $R_i = 0$ e $a R_j + b R_i = 0$, con $a \neq 0$, allora per forza anche $R_j = 0$

— 0 — 0 —

Esempi di matrici a scala (provenienti da sistemi 3×3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
HA SOLUZ. UNICA

Dalla 3ª trovo z ,
dalla 2ª trovo y ,
dalla 1ª trovo x

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

↑
NON HA SOLUZ
(l'ultima equ.
è $0 = 2$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑
INFINITE SOLUZ

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{4} \quad y = t \quad x = -\frac{3}{2}y + 1$$
$$= -\frac{3}{2}t + 1$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}t + 1, t, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) + t \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)$$

$$= \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) + t (-3, 2, 0)$$

↑
invece di t uso $2t$
come parametro

TEORIA Una volta ridotto a scala il sistema ha

- 0 soluzioni se c'è una riga con tutti 0 sui coeff. e un termine noto $\neq 0$
- 1 soluzione unica se ogni riga ha un solo 0 iniziale più della precedente, e così via fino all'ultima variabile
- ∞ soluzioni se c'è almeno una colonna corrisp. ai coeff. in cui manca il PIVOT

In termini di PIVOT:

- 0 solus. se c'è almeno un PIVOT nella colonna dei termini noti.
- solus. unica se ogni colonna dei coeff. ha il suo pivot
- infinite solus: c'è almeno una colonna dei coeff. in cui non c'è il pivot.

Tutte le variabili nella cui colonna non c'è il PIVOT si possono usare come parametri liberi.

Lavorando alla Gauss, si possono sempre mettere degli 0 sopra i PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2R_1 - 3R_3 \\ 2R_2 - R_3 \\ \text{Copia } R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 5R_1 - 2R_2 \\ \text{Copia } R_2 \\ \text{Copia } R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 10 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Adesso risolvere è banale.

— 0 — 0 —