

Sistemi lineari

Equazione lineare: equazione in cui compaiono solo somme delle incognite moltiplicate per coeff. più termini noti

$$2x - 3y + 7z = 25$$

Diagram illustrating the components of the linear equation $2x - 3y + 7z = 25$:

- coeff.** (coefficients) are indicated by arrows pointing to 2, -3, and 7.
- incognite** (unknowns) are indicated by arrows pointing to x , y , and z .
- termine noto** (known term) is indicated by an arrow pointing to 25.

Gentlemen agreement: a.s. le incognite, a.d. il termine noto

Un sistema lineare è un sistema costituito da equ. lineari

Esempi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad 2 \text{ equ. in } 2 \text{ incognite}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -2 \\ x + 2z = 25 \end{cases} \quad 2 \text{ equ. in } 3 \text{ incognite}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad 3 \text{ equ. in } 2 \text{ incognite}$$

Prima classificazione

→ sistema OMOGENEO se tutti i termini noti sono $= 0$

→ sistema NON OMOGENEO se almeno un termine noto è $\neq 0$.

Oss Un sistema omogeneo ammette sempre almeno una soluzione, cioè quella con tutte le incognite = 0.
Più a seconda dei casi possono esserci altre sol. oppure no.

Per un sistema LINEARE in generale ci sono (solo) 3 possibilità
→ il sistema ammette SOLUZIONE UNICA
→ il sistema NON HA SOLUZIONI (impossibile)
→ il sistema ha INFINITE SOLUZIONI, dipendenti da un certo numero di parametri che possiamo scegliere a piacere.

Esempio 1
$$\begin{cases} x+y = 2 \\ x-3y = 5 \end{cases}$$

Metodo bonino Dalla 2ª equ: $x = 3y + 5$ Vado nella 1ª:
 $(3y+5)+y = 2 \rightsquigarrow 4y = -3 \rightsquigarrow y = -\frac{3}{4}$
A questo punto
 $x = 3y + 5 = -\frac{9}{4} + 5 = \frac{11}{4}$

L'unica soluzione è $(x, y) = (\frac{11}{4}, -\frac{3}{4})$ ← VERIFICARE CHE SIA SOLUZIONE

Metodo che ha futuro 1ª equ. - 2ª equ: $4y = -3 \rightsquigarrow y = -\frac{3}{4}$

3 · 1ª equ + 2ª equ: $4x = 11 \rightsquigarrow x = \frac{11}{4}$

Esempio 2
$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 6y = 11 \end{cases}$$

2 · 1ª equ:
$$\begin{aligned} 4x - 6y &= 16 \\ 4x - 6y &= 11 \end{aligned}$$



Non ci sono soluzioni

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 & \cdot 3 \\ 3x - 6y = 4 & \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 6x - 12y &= 15 \\ 6x - 12y &= 8 \end{aligned}$$



Esempio 3
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$$

Osservo che tutta la 2^a equ., fermi i coefficienti compresi, è il doppio della prima, quindi inutile. Quindi basta risolvere la 1^a

$$x - 2y = 4 \quad \leadsto \quad x = 2y + 4$$

A y posso dare i valori che voglio, e mi trovo x di conseguenza

$$y = t \quad x = 2t + 4$$

$$(x, y) = (2t + 4, t) \\ = (4, 0) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro libero}}}{t} (2, 1)$$

Nota bene: quella scritta è la forma parametrica della retta $x - 2y = 4$.

Esempio 4
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

Ricopro la 1^a riga
2^a riga - 2 · 1^a riga
3^a riga - 1^a riga

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - 3z = -5 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{uguali} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases}$$

Pongo $z = t$ ^{2^a} $\leadsto 3y = 3z - 5 = 3t - 5 \leadsto y = t - \frac{5}{3}$

^{1^a} $\leadsto x = y - z + 3 = \cancel{t} - \frac{5}{3} - \cancel{t} + 3 \leadsto x = \frac{4}{3}$

Conclusione: il sistema ha infinite soluzioni date dalla formula

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, t - \frac{5}{3}, t \right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0 \right) + t(0, 1, 1)$$

Come sempre fare la verifica

↑
risolve il sistema
se fosse
omogeneo

Esempio 5

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -z = -11 \end{cases} \quad 2^a - 2 \cdot 1^a$$

$$z = 11 \xrightarrow{1^a} \begin{aligned} x + y + 11 &= 7 \rightarrow x + y = -4 \\ y = t &\rightarrow x = -t - 4 \end{aligned}$$

Soluzione generale: $(x, y, z) = (-t - 4, t, 11)$

$$= \boxed{(-4, 0, 11)} + t \boxed{(-1, 1, 0)}$$

↑
risolve il sistema
vero

↑
risolverebbe il
sistema omog.

Insieme risolvono il sistema vero per ogni valore di t .

Esempio 6 $x - y + 3z = 5$ 1 equ. in 3 incognite

$$z = t, y = s \rightarrow x = y - 3z + 5 = s - 3t + 5$$

Soluz. generale: $(s - 3t + 5, s, t)$

$$= (5, 0, 0) + t(-3, 0, 1) + s(1, 1, 0)$$

↑
2 parametri liberi

Esempio 7

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ x - w = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ x - w = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ -z - w = -4 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$3^a - 1^a$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ -z - w = -4 \\ z - w = -2 \end{cases}$$

$4^a - 2^a$

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y + w = 2 \\ z + w = 4 \\ -2w = -6 \end{cases}$$

(cambio segno)

$3^a + 4^a$

$$w = 3 \rightsquigarrow z = -w + 4 = 1 \rightsquigarrow y = -w + 2 = -1 \\ \rightsquigarrow x = 5 - z = 4$$

Soluzione unica $(x, y, z, w) = (4, -1, 1, 3)$ ← verifica!
— 0 — 0 —