

RETTE NEL PIANO

- rappresentazione cartesiana $\nearrow$ implicita
 $\searrow$ esplicita
- rappresentazione parametrica

CARTESIANA

Implicita

$$ax + by + c = 0$$

Esplicita

$$y = mx + n$$

Esplicita: PRO: comunque fisso m ed n ottengo retta sensata
 rette diverse hanno almeno un parametro diverso

CONTRO: non rappresenta le rette verticali, che hanno equ. $x = x_0$

Implicita: PRO: rappresenta tutte le rette

CONTRO: non è vero che ogni scelta di a, b, c produce rette sensate ($a=b=0, c=5$)
 non è detto che parametri diversi producano rette diverse ($x+y-3=0$
 $2x+2y-6=0$)

Passare dall'una all'altra è sostanzialmente banale

Esempi $y = \frac{2}{3}x - 5 \rightsquigarrow 2x - 3y - 15 = 0$

$$3x - 2y + 7 = 0 \rightsquigarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

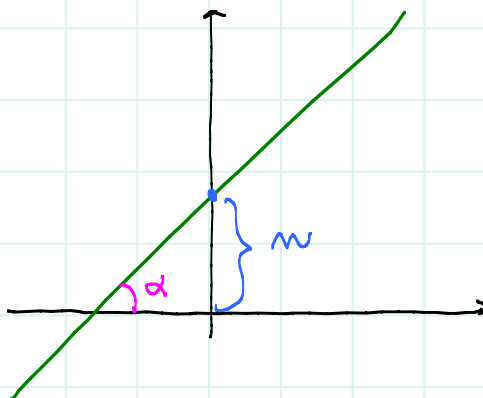
Significato geometrico di m ed n nella esplicita

$$y = mx + n$$

↑
coeff. angolare

$$m = \tan \alpha$$

↑
angolo tra retta e
semiasse positivo delle x



Esempio Determinare il coeff. angolare della retta che passa per $(2021, 712)$ e $(2023, 709)$

$(2021, 712)$

$(2023, 709)$

$$m = -\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

↑
spost. vert.

↑
spost. orizz.

Due rette in forma esplicita

$$y = m_1x + m_1$$

$$y = m_2x + m_2$$

sono

• parallele $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

• perpendicolari $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (occluso al caso particolare $m_2 = 0$)

Caso parallele

$$m_1 = \tan \alpha_1$$

$$m_2 = \tan \alpha_2$$

Perpendicolari $\Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\tan \alpha_2 = \tan \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

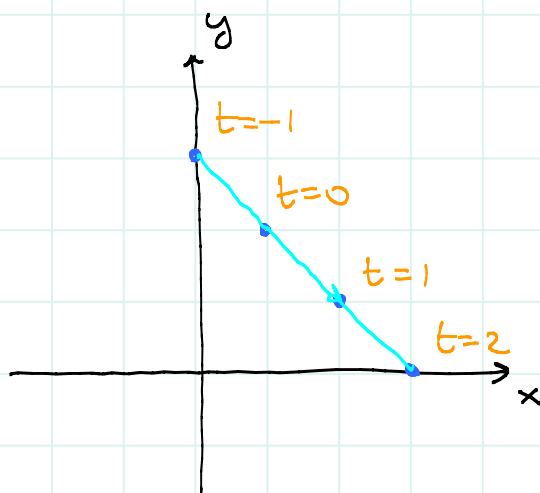
PARAMETRICA

La rapp. è del tipo

$$(a,b) + t(c,d) \quad \text{con } (c,d) \neq (0,0)$$

Esempio $(1,2) + t(1,-1)$

Al variare di $t \in \mathbb{R}$, la formula di sopra descrive la posizione di un omibus.



$$t=0 \rightsquigarrow (1,2)$$

$$t=1 \rightsquigarrow (1,2) + (1,-1) = (2,1)$$

$$t=2 \rightsquigarrow (1,2) + 2(1,-1) = (3,0)$$

$$t=-1 \rightsquigarrow (1,2) - (1,-1) = (0,3)$$

Quindi

$$\underbrace{(a,b)}_{\substack{\uparrow \\ \text{posizione} \\ \text{al tempo } t=0}} + t \underbrace{(c,d)}_{\substack{\uparrow \\ \text{direzione} \\ \text{di spostamento}}} = (a+ct, b+dt)$$

In linguaggio vettoriale possiamo scrivere

$$\vec{U}_0 + t \vec{U}$$

Tornando all' esempio di inizio pagina

$$P(2021, 712)$$

•

Posso scrivere la retta come

$$P + t(Q - P)$$

$$(2021, 712) + t(2, -3)$$

$$Q(2023, 709)$$

•

La rappresentazione non è unica

$Q + t(P - Q)$ va bene uguale

Come passo dalla cartesiana alla parametrica?

Scelgo 2 p.ti a caso e poi ragiono come sopra.

Esempio $2x + 3y + 5 = 0 \rightsquigarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

$$x = -1 \rightsquigarrow y = -1$$

$$x = 2 \rightsquigarrow y = -3$$

Quindi la retta passa per

$$P = (-1, -1) \text{ e } Q = (2, -3)$$

$$P + t(Q - P) = (-1, -1) + t(3, -2)$$

Nota bene: coeff. ang. = $-\frac{2}{3}$

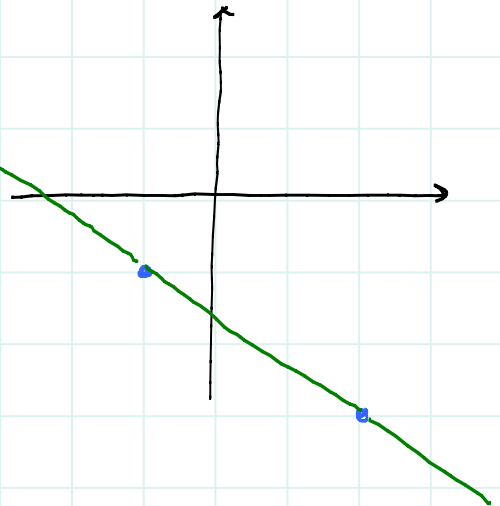
Le possibili rapp. sono infinite

$$Q + t(P - Q) = (2, -3) + t(-3, 2)$$

Altre possibili

$$(-1, 1) + t(-3, 2)$$

$$(-1, 1) + t(6, -4)$$



Come passo dalla parametrica alla cartesiana?

Esempio $(5, 2) + t(-1, 3)$

1° modo Sostituisco 2 valori di t , e poi scrivo la retta per 2 p.ti

$$t = 0 \rightsquigarrow (5, 2)$$

$$t = 1 \rightsquigarrow (4, 5)$$

$y = mx + n$ Impongo il passaggio

$$\begin{cases} 2 = 5m + n \\ 5 = 4m + n \end{cases}$$

Risolve e trovo m ed n ($m = -3$, $n = 17$)

2° modo

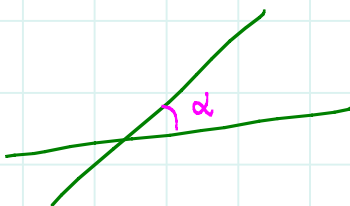
$$(5, 2) + t(-1, 3) = \left(\underset{x}{5-t}, \underset{y}{2+3t} \right)$$

Ricavo t da x e sostituisco in y :

$$\begin{aligned} 5-t &= x \rightsquigarrow t = 5-x \rightsquigarrow y = 2+3t = 2+3(5-x) \\ &= 2+15-3x \\ &= 17-3x \end{aligned}$$

Ⓢ

Angolo tra 2 rette



In parametrica è l'angolo tra le direzioni, che si calcola dalla formula con il prod. scalare

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

— o — o —