

- Geometria analitica
- Sistemi lineari
- Spazi vett. e applicazioni lineari
- Prodotti scalari

MATRICE

GEOM. ANALITICA

Vettori geometrici

$\mathbb{R}^2$ = coppie (x, y) di numeri reali

$\mathbb{R}^3$ = terne (x, y, z) di num. reali

$\vdots$

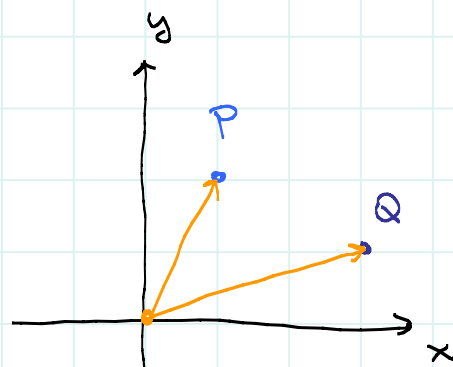
$\mathbb{R}^{77}$ = oggetti del tipo $(x_1, x_2, \dots, x_{77})$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 numeri reali

$\mathbb{R}^2$ si rappresenta con un piano

$P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ punto del piano

$\uparrow$ posso pensarlo come vettore che è
 "applicato" nell'origine e ha la freccia
 in $(1, 2)$

Punti $\rightsquigarrow$ Vettori



$Q = (3, 1) \in \mathbb{R}^2$

Operazioni tra vettori :

- Somma
- prodotto per uno scalare
- prodotto scalare
- norma
- distanza

SOMMA DI VETTORI

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: 1 vettore

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio

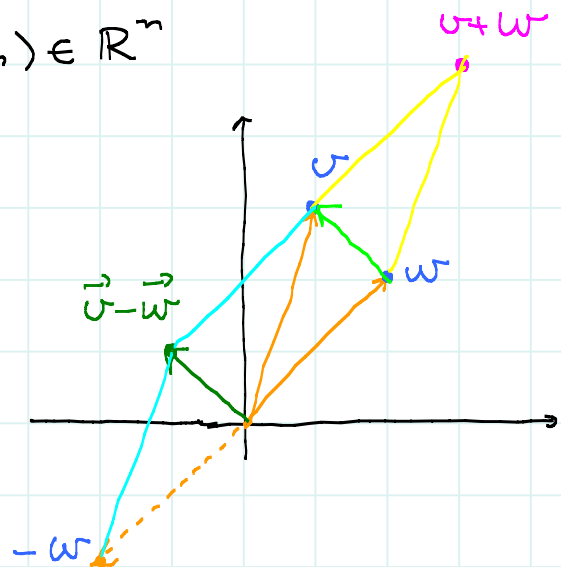
$$\vec{v} = (1, 3) \quad \vec{w} = (2, 2)$$

Allora

$$\vec{v} + \vec{w} = (3, 5)$$

= vettore ottenuto con la regola
del parallelogrammo

$\vec{v} - \vec{w} = (-1, 1)$ = vettore applicato in $\vec{w}$ con la punta in $\vec{v}$
= qualcosa che aggiunto a $\vec{w}$ porta in $\vec{v}$.



PRODOTTO PER UNO SCALARE

↑
numero

INPUT: un vettore e un numero

OUTPUT: vettore

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

↑
vettore

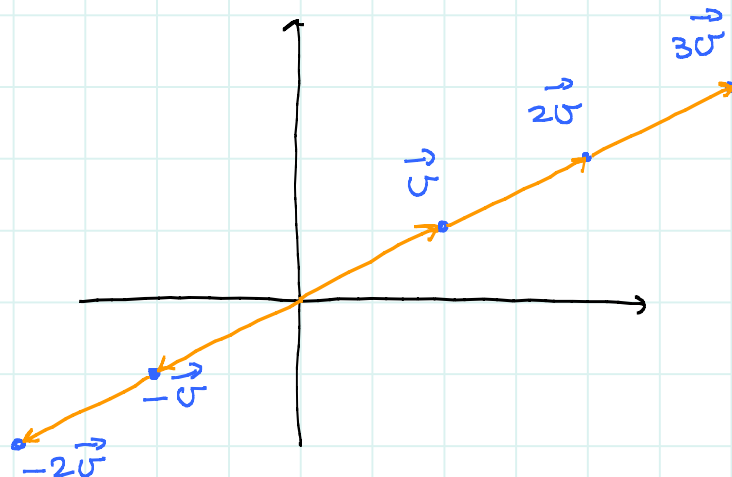
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

↑
scalare

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Geometricamente corrisponde
ad "allungare" o "accorciare"
il vettore

$\lambda < 0$ → direzione opposta.



PRODOTTO SCALARE

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: 1 numero

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

↑ ↑
simili

Proprietà del prodotto scalare

① Simmetrico $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ (banale)

② $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$

↑ ↑
somma somma di
di vettori numeri

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{y} + \vec{z} = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle &= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \dots + x_n (y_n + z_n) \\ &= \underbrace{x_1 y_1}_{\text{orange}} + \underbrace{x_1 z_1}_{\text{green}} + \underbrace{x_2 y_2}_{\text{orange}} + \underbrace{x_2 z_2}_{\text{green}} + \dots + \underbrace{x_n y_n}_{\text{orange}} + \underbrace{x_n z_n}_{\text{green}} \\ &= \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{\text{orange}} + \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle}_{\text{green}} \end{aligned}$$

③ $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ per ogni $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori di $\mathbb{R}^n$
per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle &= x_1 (\lambda y_1) + x_2 (\lambda y_2) + \dots + x_n (\lambda y_n) \\ &= \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \dots + \lambda x_n y_n \\ &= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \\ &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

NORMA

INPUT: vettore

OUTPUT: numero ≥ 0

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

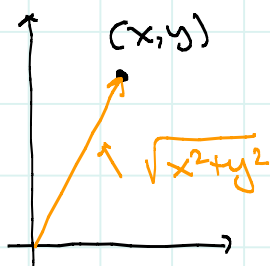
PITAGORONE a n componenti

↑

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

In $\mathbb{R}^2$ con $\vec{v} = (x, y)$, allora

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

= lunghezza del vettore
(Pitagora)**DISTANZA**

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: 1 numero ≥ 0

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(norma della differenza)

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Oss. $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$

— 0 — 0 —

Esercizio 1 Espandere $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

↑
proprietà ② sulla
seconda variabile

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

↑
proprietà ① sulla
prima variabile↑
uguali

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

La stessa cosa vale per la differenza

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Esercizio 2

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$\vec{x}$ vettore $\in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R}$ numero

$$\|\lambda \vec{x}\| = \left\{ (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}_{\|\vec{x}\|}$$

$|\lambda|$ ← valore assoluto di un numero

↑↑
occhio a questo passaggio

— 0 — 0 —