

ISOMETRIE DELLO SPAZIO $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che conservano le distanze
 $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$

Caso più semplice

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = Ax$$

matrice 3×3 ortogonale

Matrici 3×3 ortogonali:

- Identità
- Simmetria rispetto ad un piano
- rotazione di angolo θ risp. retta per 0
- rotazione come sopra + simmetria risp. piano $\perp$ alla retta

Domande: ① Data la descrizione geometrica, trovare la matrice che la rappresenta
 ② Data A matrice 3×3 ortogonale, capire cosa rappresenta geometricamente.

Problema ① nei quattro casi descritti sopra

L'identità è ovvia.

Simmetria rispetto ad un piano. Strategia:

→ Mi procuro una base del piano e un vettore ortogonale

$\underbrace{v_1, v_2}_{\text{base del piano}}, v_3$
 ↑
 vettore ortogonale

→ Nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ la simmetria è rappresentata dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice dalla base strana alla base strana

→ Cambio base per avere la matrice A dalla canonica alla canonica

$$A = M S M^{-1} \quad \text{dove} \quad M = (v_1 | v_2 | v_3)$$

Oss. ① Non serve che la base sia ortonormale /onale. Serve solo che v_3 sia $\perp$ agli altri due.

② Se la base è ortogonale, è più facile fare M^{-1}

③ Se la base è ortonormale, allora è banale fare $M^{-1} (= M^t)$,
ma si rischia di avere radici al denominatore

Esempio 1 Piano sia $2x + y - 3z = 0$

$$v_3 = (2, 1, -3) \quad \leftarrow \perp \text{ al piano}$$

$$v_1 = (1, -2, 0) \quad \left. \begin{array}{l} v_2 = (0, 3, 1) \end{array} \right\} \text{ base del piano e sono per forza } \perp \text{ a } v_3$$

La matrice della simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

Esempio 2 Consideriamo il piano che passa per l'origine e per i punti $\underline{(2, 1, 2)}_{v_1}$ e $\underline{(3, 1, 3)}_{v_2}$

Potei trovare l'eq. del piano e procedere come prima.

In realtà ho già v_1 e v_2 perché il piano è $\text{Span}(\{v_1, v_2\})$.

Devo solo procurarmi v_3 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (1, 0, -1) \quad \text{verifica che è } \perp \text{ agli altri 2}$$

A questo p.to procedo come da strategia.

Rotazione di un angolo θ rispetto ad una retta

↑ passante per l'origine

Caso semplice: rotazione intorno all'asse z .

Bisogna specificare il verso di rotazione: rotazione di θ in senso antiorario per un osservatore che sta in piedi secondo il semiasse positivo delle z

In questo caso è equivalente a ruotare nel piano xy lasciando l'asse z inalterato. Quindi la matrice è

rotazione nel
↑ piano xy

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategia per ruotare intorno ad una retta generica:

↑ per l'origine

→ Mi procuro una base v_1, v_2, v_3 in cui

- v_3 rappresenta la direzione della retta e "come sta in piedi l'osservatore"
- v_1, v_2 sono una base del piano $\perp$ alla retta, e sono una base ortonormale del piano (basta ortogonale con la stessa norma)



v_1 e v_2 devono essere tali che v_1 si sovrappone a v_2 con una rotazione di 90° in verso giudicato antiorario dall'osservatore.

Come capisco se v_1 e v_2 sono giusti / sbagliati? Quando la matrice di cambio di base: se ha $\det > 0$ è quella giusta, altrimenti è quella sbagliata (e basta scambiare v_1 e v_2)

→ In questa base la rotazione ha la forma "canonica" scritta sopra

→ Cambio base con la matrice M ,

Esempio Scrivere la matrice A che rappresenti la rotazione di 90° in verso orario rispetto alla retta $t(1, 2, 3)$
per l'origine in piedi secondo $(1, 2, 3)$
 $\uparrow$
 $\uparrow$
 v_3

Mi servono v_1 e v_2 che sono una base ortonormale del piano $\perp$ alla retta, cioè il piano $x + 2y + 3z = 0$

$$w_1 = (-2, 1, 0) \quad w_2 = (-3, 0, 1)$$

Per renderla ortogonale ho 2 alternative: $\rightarrow$ GS su w_1, w_2
 $\rightarrow$ ottenere un nuovo w_2
a partire da w_1 e v_3
con la misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{w}_2 = (-3, -6, 5)$$

Vediamo se il verso è giusto

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 36 + 5 + 9 + 20 > 0$$

OK.

Ortonormalizzo i primi 2: $v_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$$v_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1}$$

Matrice voluta