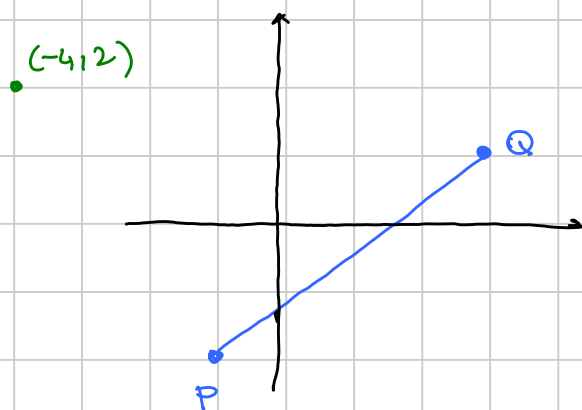


Esempio 1 Nel piano, un quadrato ha un vertice in $(-1, -2)$ e un vertice in $(3, 1)$, e un terzo vertice nel semipiano $y \geq 0$. Chi sono gli altri 2 vertici?



Si può fare contando i quadretti...

Metodo più sistematico:

- scrivo la rotazione di 90° antioraria con centro in P, la applico a Q e trovo un terzo vertice
- analogamente, scrivo la rot. 90° oraria rispetto a Q e la applico a P.

Rotazione 90° antioraria con centro in P

$$x \rightsquigarrow x - p \rightsquigarrow \text{Rot}(x - p) \rightsquigarrow \text{Rot}(x - p) + p$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y-2 \\ x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-3 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f(x, y) = (-y-3, x-1)$$

e in particolare

$$f(Q) = f(3, 1) = (-4, 2)$$

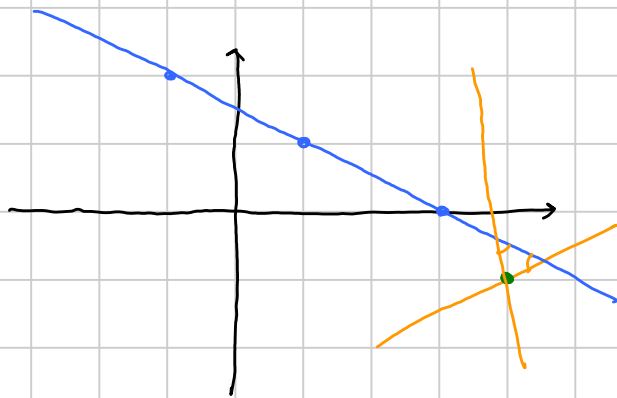
— o — o —

Esempio 2 Consideriamo la retta $x+2y=3$.

Scrivere le rette passanti per $(4, -1)$ e che formano con la retta data un angolo di 60°

Chi sono i vettori direzione delle 2 rette che cerco?

Sono i ruotati di 60° orario e antiorario della retta data (o vettore del suo vettore direzione $(-2, 1)$)



$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

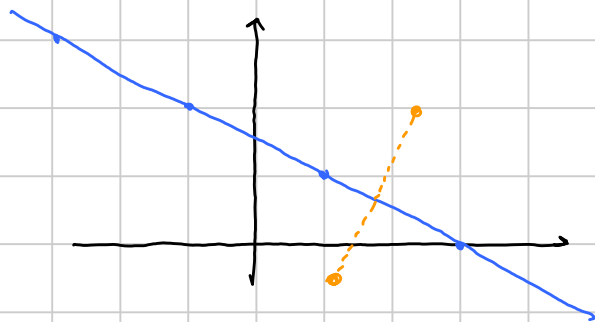
La prima retta è $(4, -1) + t(2 - \sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 1)$

Per la seconda, uso la matrice con -60° e ottengo

$$(4, -1) + t(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$$

Esempio 3 Scrivere l'espressione della simmetria rispetto alla retta $x+2y=3$.

Passo indietro: come si risolverebbe il problema se la retta passasse per l'origine?



Esempio 3-E Scrivere la simmetria rispetto alla retta $x+2y=0$

Strategia: $v_1 = \underline{(2, -1)}$ $v_2 = \underline{(1, 2)}$
dir. retta perp. retta

$$A v_1 = v_1$$

$$A v_2 = -v_2$$

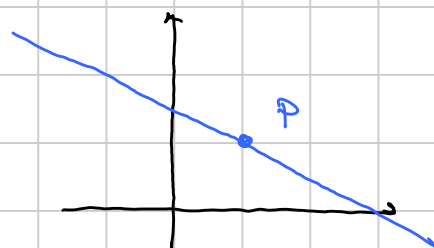


Quindi la matrice A , nella base $\{v_1, v_2\}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ora vado nella base canonica con la matrice di cambio di base

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

L'ultima scritta è la matrice che rappresenta la simmetria rispetto a $x+2y=0$.



Tornando all'esercizio 3:
ora facciamo

$$x \rightsquigarrow (x-P) \rightsquigarrow \text{Sim}(x-P) \rightsquigarrow \text{Sim}(x-P)+P$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il conto si ottiene l'espressione

$$\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} + 1 = \boxed{\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}}$$

$$-\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} + 1 = \boxed{-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5}}$$

Reverse engineering Calcoliamo i p.ti fissi, cioè risolviamo

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = x \\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} = y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y = -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = -\frac{12}{5} \end{cases} \quad \begin{matrix} x+2y=3 \\ \text{uguale} \end{matrix}$$

e quindi i p.ti fissi sono esattamente la retta.

Domanda: dove va a finire la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

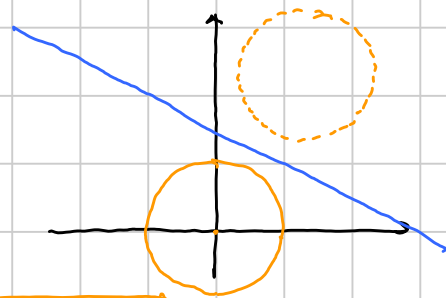
Il raggio resta lo stesso, il centro viene trasformato dalla simmetria

$$(0, 0) \rightsquigarrow \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

↑ ↑
vecchio centro nuovo centro

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1$$

equazione della nuova circonferenza



Esempio Cosa succede se faccio

- prima la simmetria rispetto alla retta $x + y = 3$
- poi una rotazione di 60° rispetto ad un p.to dato

Idea: le matrici si compongono, quindi guardando i determinanti la composizione avrà determinante -1 , quindi sarà una matrice di simmetria. Quindi la parte matriciale è di simmetria.

Esempio Cosa succede se compongo 2 simmetrie

La parte matriciale è il prodotto di 2 matrici di $\text{Det} = -1$, quindi ha $\text{Det} = 1$, quindi è una matrice di Rotazione.

Ora

- se le 2 rette non sono parallele, allora avrà la rotazione rispetto al p.to di intersezione e l'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo compreso tra le due rette

- se le 2 rette sono parallele ottengo una traslazione di un vettore che è il doppio della distanza tra le rette,

