

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE IN $\mathbb{R}^2$

Def. Una $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice isometria se
 $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$

Teorema f è isometria $\Leftrightarrow f(x) = Ax + b$
 $\uparrow$
 matrice ortogonale

Fatto Le matrici 2×2 ortogonali sono quelle del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 1 \quad \text{autov: } \cos \theta \pm i \sin \theta$$

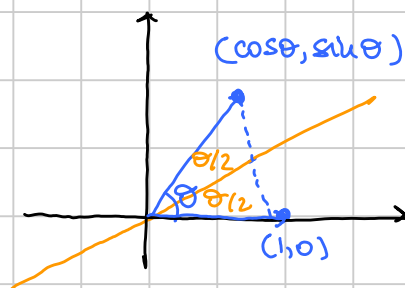
ROTAZIONE con centro nell'origine
 di angolo θ in senso antiorario

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \quad \text{autov: } \pm 1$$

SIMMETRIA rispetto ad
 una retta che passa per 0

Nel caso della simmetria, la retta rispetto alla quale si fa si può vedere in due modi

- 1° modo : è l'autospazio di 1
- 2° modo : vedo dove va $(1, 0)$, cioè $(\cos \theta, \sin \theta)$ e la retta sarà l'asse del segmento che li congiunge, cioè la retta che passa per l'origine e forma con il semiasse positivo delle x un angolo $\theta/2$



Achtung! La caratterizzazione della retta risp. a cui si fa la simmetria vale solo nel caso in cui $f(x) = Ax$, cioè $b = 0$.

— 0 — 0 —

CLASSIFICAZIONE Come sono fatte tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$?

Tutto si basa sull'insieme dei p.ti fissi, cioè gli $x \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x)=x$.

Algebricamente, per trovare i p.ti fissi risolvo

$$Ax + b = x, \quad \text{cioè} \quad \underline{(A - Id)x = -b}$$

sistema lineare 2×2 non omogeneo

Ci sono 4 casi

- nessuna soluzione
- soluzione unica (un pto)
- infinite sol. dipendenti da un parametro (una retta)
- infinite sol. dipendenti da due parametri (tutto il piano fisso, cioè $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$)

Allora

- se l'insieme dei p.ti fissi è una retta, la trasformazione è la simmetria risp. alla retta.
- se c'è un unico pto fisso, la trasformazione è una rotazione con centro in quel pto di angolo $\theta \neq 0$
- se non ci sono p.ti fissi, allora ci sono 2 possibilità
 - $f(x)$ è una traslazione
 - $f(x)$ è una simmetria risp. ad una retta, seguita da una traslazione rispetto ad un vettore parallelo al vettore velocità della retta.

Dettagli sul caso senza p.ti fissi Se non ci sono p.ti fissi, vuol dire che il sistema

$$(A - Id)x = -b$$

non ha soluzioni. Per Rouché - Capelli vuol dire che i 2 ranghi (quali?) sono diversi. Quindi per forza $\text{rang}(A - Id) = 0, 1$

- Se $\text{rang}(A - Id) = 0$, allora $A - Id = 0$, cioè $A = Id$, cioè $f(x) = x + b$ e questa è la traslazione

- Se $\text{rang}(A - Id) = 1$, allora $\lambda = \pm 1$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $= 1$, quindi per forza l'altro autovalore è -1 , quindi A è una matrice di simmetria rispetto ad una retta.

A questo imponendo che $-b \notin \text{Im}(A - Id)$ si ottiene che b deve essere parallelo alla direzione della retta.

— o — o —

Ricapitolando: di fronte ad una $f(x)$

- come capisco che si tratta di una isometria?

Risposta: guardo se la matrice è ortogonale

- come capisco di cosa si tratta?

Risposta: guardo i p.ti fissi

— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = (-y + 7, x - 4)$

La scrivo come $f(x) = Ax + b$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ROTAZIONE

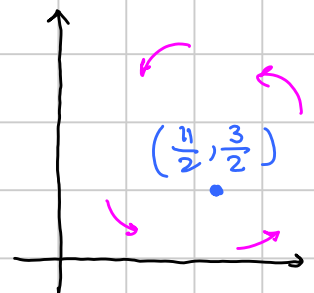
DI 90° IN SENSO

ANTIORARIO

Per sapere rispetto a cosa sto ruotando, calcolo il p.to fisso

$$f(x, y) = (x, y); \quad (-y + 7, x - 4) = (x, y)$$

$$\begin{cases} -y + 7 = x \\ x - 4 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x = 11 \\ 2y = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{matrix}$$



Data una applicazione, come determino

① l'immagine di un pto, ad esempio l'immagine di $(2,1)$?

Sostituisco nell'espressione! $f(2,1) = (-1+7, 2-4) = (6,-2)$

② la controimmagine di un pto, ad esempio chi va finire in $(2,1)$?

Risolvere il sistema inverso $(-y+7, x-4) = (2,1)$

③ l'immagine di una retta, ad esempio la retta $x+2y=3$?

1° modo: prendo 2 pti della retta, vedo dove vanno a finire, e determino la retta immagine.

2° modo: scrivo la retta in parametrica, nell'esempio

$$(1,1) + t(2,-1) = (1+2t, 1-t)$$

e sostituisco nell'espressione di $f(x,y)$

$$\underbrace{(-1+t+7)}_{-y+7}, \underbrace{(1+2t-4)}_{x-4} = \underbrace{(6,-3) + t(1,2)}_{\text{retta immagine in forma parametrica}}$$

questa direzione è il rotato della direzione precedente

④ la controimmagine di una retta, cioè ad esempio quale retta va a finire nella retta $x+2y=3$?

1° modo: faccio la controimmagine di due pti.

2° modo: cerco la parametrica a coeff. incogniti

$$(a,b) + t(c,d) = (a+tc, b+td)$$

poi sostituisco ed impongo che venga la retta data

$$\underbrace{(-b-t d+7)}_{-y+7}, \underbrace{(a+tc-4)}_{x-4} = (1+2t, 1-t)$$

Uguagliando i coeff. trovo a, b, c, d
 $c = -1, d = -2, a = 5, b = 6$

3° modo : sostituisco l'espressione di $f(x, y)$ nell'eq. cartesiana della retta

$$\begin{array}{c} x + 2y = 3 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ -y+7 \quad x-4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -y+7+2(x-4) &= 3 \\ -y+2x+7-8 &= 3 \\ -y+2x &= 4 \end{aligned}$$

Oss. Detto brutalmente

- le rappresentazioni parametriche vanno bene "in avanti"
- le " " Cartesiane " " "indietro"

— o — o —