

ISOMETRIE Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice isometria se

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Detto altrimenti: le isometrie sono le applicazioni che conservano le distanze.

Teorema (struttura delle isometrie)

Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se e solo se è del tipo

$$f(x) = Ax + b \quad (\text{cioè è un'affinità})$$

con la matrice A ortogonale.

Dim

1° fatto Tutte le affinità con A ortogonale conservano le distanze.

Presi $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\|^2 \\ &= \|Ax + b - Ay - b\|^2 \\ &= \|A(x - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 \\ &= \text{dist}^2(x, y) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{le matrici ortogonali conservano} \\ \text{le norme} \end{array} \right\}$$

Oss. Più in generale, se A è ortogonale, allora

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^t Aw = v^t \underbrace{A^t A}_{I_n} w = v^t w = \langle v, w \rangle$$

Se $v = w$ ottengo $\|Av\|^2 = \|v\|^2$

2° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora f conserva le norme, cioè

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Infatti $\|f(x)\| = \text{dist}(f(x), 0)$
 $= \text{dist}(f(x), f(0))$
 $= \text{dist}(x, 0)$
 $= \|x\|$

} uso $f(0) = 0$
} f è isometria

3° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora f conserva i prodotti scalari, cioè

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Per ipotesi

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(f(x), f(y)) &= \text{dist}^2(x, y) \\ \|f(x) - f(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 \\ \cancel{\|f(x)\|^2} + \cancel{\|f(y)\|^2} - 2\langle f(x), f(y) \rangle &= \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Semplificando (si può per il fatto precedente) segue la tesi.

4° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora $f(x) = Ax$ con A matrice ortogonale.

Prendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Pongo $\bar{e}_k = f(e_k)$. Allora $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Infatti

• per $i \neq j$ si ha

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \underset{\text{def.}}{=} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \underset{\substack{\text{base canonica} \\ f \text{ conserva i prod. scalari}}}{=} \langle e_i, e_j \rangle \underset{\downarrow}{=} 0$$

• per $i = j$ si ha

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \|\bar{e}_i\|^2 = \|f(e_i)\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ conserva la norma}}}{=} \|e_i\|^2 = 1$$

Sia ora $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore qualunque.

Allora

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

$$f(v) = d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_n \bar{e}_n$$

Vonrei tanto che $d_k = c_k$ perché così avrei che

$$f(v) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$$

che è la linearità.

Ma trattandosi di basi ortonormali

$$c_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. solo} \\ \text{prod. scal.}}}{\langle v, e_k \rangle} = \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ conserva i} \\ \text{prodotti scalari}}}{\langle f(v), f(e_k) \rangle} = \langle f(v), \bar{e}_k \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. solo} \\ \text{prod. scalari}}}{d_k}$$

Questo dimostra che f è lineare, cioè $f(x) = Ax$. Le colonne di A sono proprio $f(e_1) = \bar{e}_1, \dots, f(e_n) = \bar{e}_n$ ed essendo questi una base ortonormale la matrice sarà per forza ortogonale.

5° fatto Sia f un'isometria qualunque. Allora f è del tipo $Ax + b$, con A ortogonale.

Pongo $g(x) = f(x) - f(0)$. Allora è facile verificare che $g(x)$ è un'isometria e $g(0) = 0$. Ma allora $g(x) = Ax$ e quindi

$$f(x) = Ax + \underbrace{f(0)}_b$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

ISOMETRIE DI $\mathbb{R}^2$ $f(x) = Ax + b$

con A matrice 2×2 ortogonale.

Esercizio già fatto Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali?

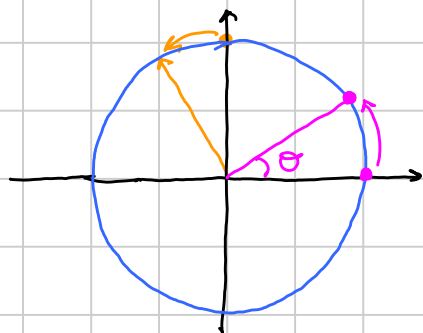
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det } 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det } -1$$

Vediamo la prima matrice cosa rappresenta.

$$(1, 0) \rightsquigarrow (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(0, 1) \rightsquigarrow (-\sin \theta, \cos \theta) = (\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta))$$



$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ rotazione di θ
 in senso antiorario
 rispetto all'origine

Chi sono gli autovalori della matrice?

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det} = \lambda^2 - \underbrace{2\cos \theta \lambda}_{\text{Traccia}} + \underbrace{1}_{\text{Det}}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

Ho quindi due radici complesse coniugate.

Una matrice di rotazione in $\mathbb{R}^2$ e la forma di Jordan reale di se stessa,

Ponendosi in generale 2 numeri complessi coniugati si scrivono nella forma

$$\rho \cos \theta \pm i \rho \sin \theta$$

quindi il blocco di Jordan corrispondente diventa

$$\rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{rotazione}}$$

↑
scalare

Casi particolari di rotazione

$$\theta = 90^\circ \text{ antioraria} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = 90^\circ \text{ oraria} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = 180^\circ \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

equivalente a fare

- la scalare di fattore -1
- simmetria rispetto all'origine

Esercizio Scrivere la rotazione di 90° in senso orario rispetto al pto $P_0 = (2,1)$

$$x \rightsquigarrow (x - P_0) \rightsquigarrow \text{Rot}(x - P_0) \rightsquigarrow P_0 + \text{Rot}(x - P_0)$$

In componenti

$$(x, y) \xrightarrow[\text{tolgo } P_0]{\downarrow} (x-2, y-1) \xrightarrow[\text{ruoto}]{\downarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ -x+2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (y+1, -x+3)$$

$\uparrow$
aggiungo P_0

$$f(x, y) = (y+1, -x+3) \quad \text{In particolare } f(2,1) = (2,1)$$

— o — o —